

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"**

FACOLTA' DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI ANALISI E PROGETTAZIONE STRUTTURALE

CATTEDRA DI "TECNICA DELLE COSTRUZIONI II"

TESI DI LAUREA

LE STRUTTURE DEL 1800 NELLA COSTIERA AMALFITANA:

LA CUPOLA DELLA CHIESA SANTA MARIA A MARE

IN MAIORI

Sommario

Relatore:

Ing. PIETRO LENZA

Candidato:

ADOLFO FAZZARI

Matr.40/495

Anno accademico 1998/99

Ringraziamenti

Si ringrazia il Prof. R. Sparacio, docente di Scienza delle Costruzioni presso la facoltà di Ingegneria di Napoli, per la collaborazione offerta nella ricerca storica dell'evoluzione del modello statico delle Cupole e l'Ing. A. Balsamo, consulente tecnico dell'impresa che ha realizzato gli interventi alla Basilica di San Francesco di Assisi, per le informazioni fornite sulle caratteristiche dei materiali compositi in fibra di carbonio.

Sommario

L'analisi strutturale di edifici monumentali assume, oggi, grande rilievo poiché è molto sentita l'esigenza di conservare il grande patrimonio storico e artistico che essi rappresentano.

L'edificio storico, da noi analizzato, è la Chiesa Santa Maria a Mare in Maiori e, in particolare, ci siamo interessati della stabilità della Cupola.

La chiesa, esistente fin dal IX secolo, fu ampliata e completata dall'architetto neoclassico napoletano Pietro Valente tra il 1833 e il 1863.

I lavori ottocenteschi nacquero da una esigenza dovuta all'incremento progressivo della popolazione; infatti, in quegli anni si andava prospettando un rinnovamento urbano connesso all'apertura della strada costiera.

Di notevole interesse fu tale intervento perché trasformò radicalmente l'impianto Basilicale, avendo adottato lo schema a croce latina in sostituzione di una disposizione a tre navate che si concludevano con tre absidi.

Tale schema consentì al Valente di introdurre elementi di copertura, come le volte a botte, la cupola e le volte a vela, che davano maggiore armonia all'edificio. Tale tipo di strutture rappresentano una novità nella Costiera Amalfitana, in quanto vennero realizzate con il tufo proveniente, via mare, dalle cave di Posillipo, e non con il conglomerato calcareo, utilizzato per la costruzione delle volte delle altre chiese della costiera.

La scelta accurata dei materiali è dovuta, probabilmente, al fatto che il tufo rispetto alla pietra calcarea è più facile da tagliare in conci squadrati e piccoli,

senza lesionarsi, e quindi essere utilizzato più facilmente per la costruzione di archi, volte e cupole; fu utilizzata, inoltre, per la costruzione delle volte, una malta di calce, con buona resistenza a trazione, ottenuta da pietre di calcare prelevate da pozzi della costiera. I muri e i pilastri cruciformi di sostegno della cupola furono, invece, realizzati con il conglomerato calcareo di risulta dallo scavo per le fondamenta; di notevole importanza, infatti, fu l'analisi, da parte del progettista, dello stato dei materiali di risulta e la scelta di quali fossero idonei da potersi utilizzare nella nuova costruzione. La documentazione delle opere di costruzione è stata realizzata grazie alla consultazione di materiale di archivio, relativo al computo metrico dei lavori di restauro dell'800.

Prima della fase di analisi, è stata svolta una ricerca storica di quali fossero a quel tempo le conoscenze e le teorie di progettazione statica delle cupole e delle volte in generale.

Dallo studio effettuato è emerso che le prime vere e proprie teorie sugli archi e le volte si sono sviluppate nel XVIII secolo, ma in precedenza, anche in assenza di queste, si sono realizzate costruzioni di grande valore, che si basavano, in particolar modo, sulle esperienze e sull'intuizione fisica.

Nell'evoluzione storica della concezione strutturale delle cupole si possono distinguere inizialmente due periodi essenziali :

- a) l'età dell'architettura Micenea
- b) l'epoca dell'architettura Romana

Nel primo periodo fu introdotto il sistema della 'paleocupola', realizzata con anelli di conci sovrapposti con giunti orizzontali, ciascuno dei quali sporgeva a mensola sul corrispondente concio appartenente all'anello inferiore.

Esempio di tale tipo di struttura è il tesoro di Atreo, detto anche tholos.

I Romani diffusero il tipo della cupola in calcestruzzo, costituito da malta di calce e pozzolana con scaglie di pietre tufacee e vulcaniche, o anche di frammenti di laterizio.

In seguito, sempre i Romani, introdussero il tipo di cupole a cassettoni, con archi meridiani e paralleli in laterizi.

Dopo le prime esperienze, i Romani si resero conto delle problematiche strutturali delle cupole, cioè della trazione nei paralleli dalla zona tra l'imposta e il giunto al rene e della spinta sulle strutture di appoggio; la loro soluzione a tale tipo di problema fu, nel primo caso, di costruire cupole a spessore variabile con spessore più ristretto verso il punto di chiave; nel secondo caso, realizzarono delle strutture spingenti alla base della cupola, capaci di contrastare tali spinte.

Un altro passo avanti fu fatto nel Rinascimento, dove si diffuse tra gli architetti di quel tempo la tendenza di irrigidire la struttura con una costolatura e a contrastare la spinta con contrafforti e anche con il tamburo; l'introduzione dei costoloni ha irrigidito notevolmente la struttura, conferendogli anche resistenza flessionale.

Per quanto riguarda una vera e propria teoria, il contributo più lineare, arrivò, alla fine del settecento, da parte del Mascheroni, matematico bergamasco, che approfondì il concetto fondamentale perseguito, durante il XVIII secolo, nel calcolo delle cupole in muratura : mentre nell'arco in cui gli sforzi di

compressione dovevano essere ortogonali ai letti di malta tra i conci, nell'ipotesi di assenza di attrito, nella cupola è sufficiente che la risultante tra la spinta in chiave e il peso della parte sovrastante, pur obliqua al giunto, cada 'con maggior pendenza', cioè che essa deve tendere verso l'interno della cupola e quindi creare compressione negli anelli.

Il Mascheroni, infatti, basò la sua teoria sul concetto di collaborazione degli anelli paralleli con i meridiani per il sostegno statico della struttura. Egli da ciò ne trasse dei risultati analitici che si avvicinano molto al comportamento reale della copertura; infatti, egli arrivò a dimostrare che per una cupola emisferica di spessore costante, si ha trazione nei paralleli dall'imposta al giunto al rene.

La Cupola, da noi studiata, è, infatti, di forma emisferica ed è appoggiata sui cosiddetti pennacchi, che a loro volta scaricano sui pilastri in conglomerato calcareo.

L'invenzione dei pennacchi sferici, elementi di una volta a vela impostata su quattro pilastri e troncata da un piano orizzontale che ne sega l'intradosso in un cerchio sul quale può svolgersi una calotta, risolse a pieno il problema di impostare una cupola su pianta quadrata; la funzione statica di questi pennacchi è quella di contrastare la spinta della calotta; infatti, questi presentano una buona rigidità estensionale che si contrappone a quella della cupola che tende ad aprirsi all'imposta.

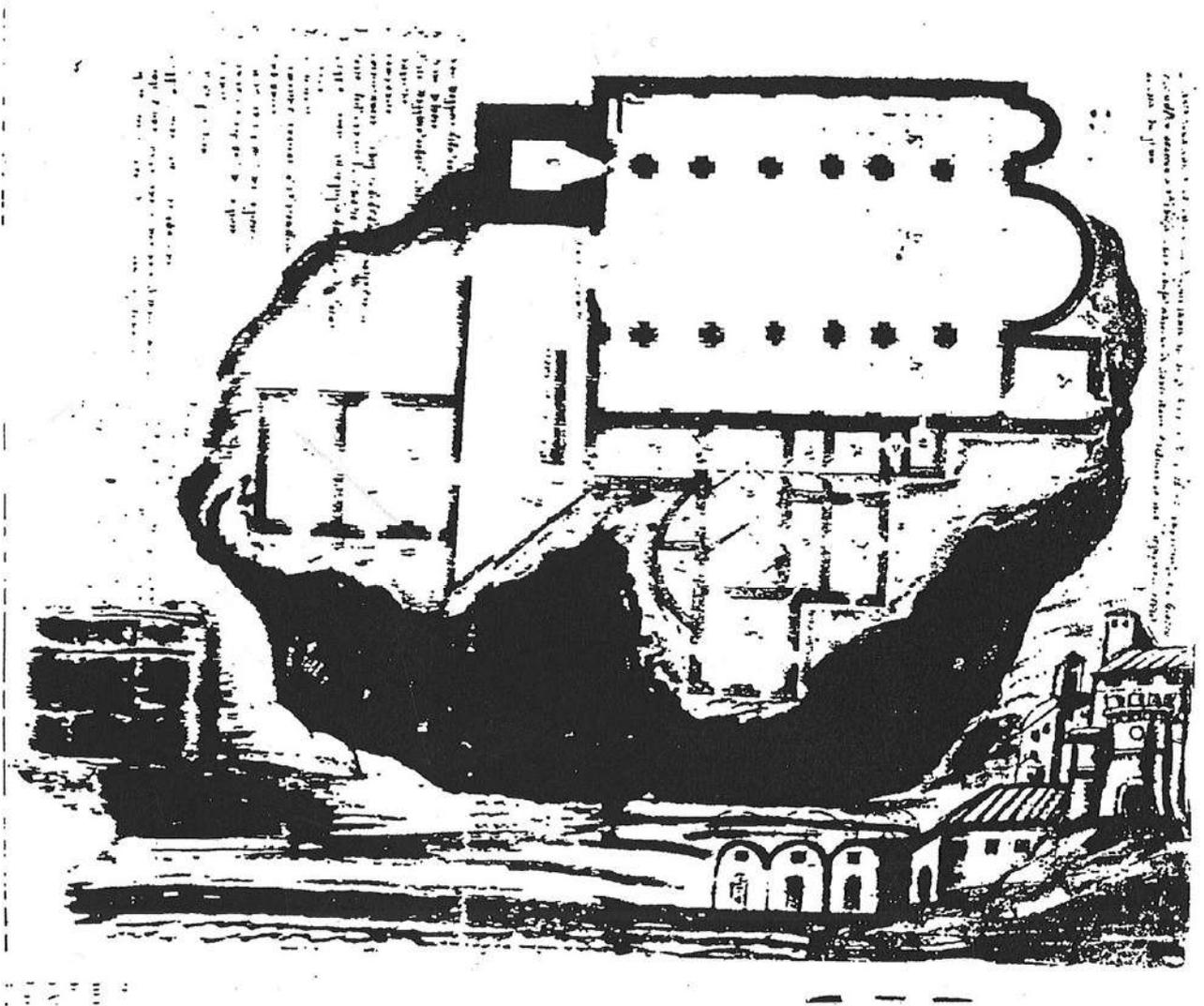
L'analisi statica della cupola si è posta come obiettivi dimostrare, in primo luogo, attraverso la teoria membranale, che, potendo la struttura resistere alle sollecitazioni esterne con una delle infinite superfici di equilibrio contenute nel

suo spessore, ne esiste almeno una che elimina la trazione nei paralleli dalla sezione di imposta fino al giunto al rene, ma che fa subentrare altri problemi statici, come il possibile schiacciamento della muratura, la parzializzazione della sezione e infine la spinta sui piedritti di sostegno; in secondo luogo, attraverso il metodo degli elementi finiti, si è potuto dimostrare l'efficacia del provvedimento adottato dal Valente con l'appoggio della cupola su pennacchi; infatti questi riducono gli effetti della trazione nei paralleli creando una zona di compressione nei punti di appoggio e quindi facendo diminuire di intensità tali sollecitazioni.

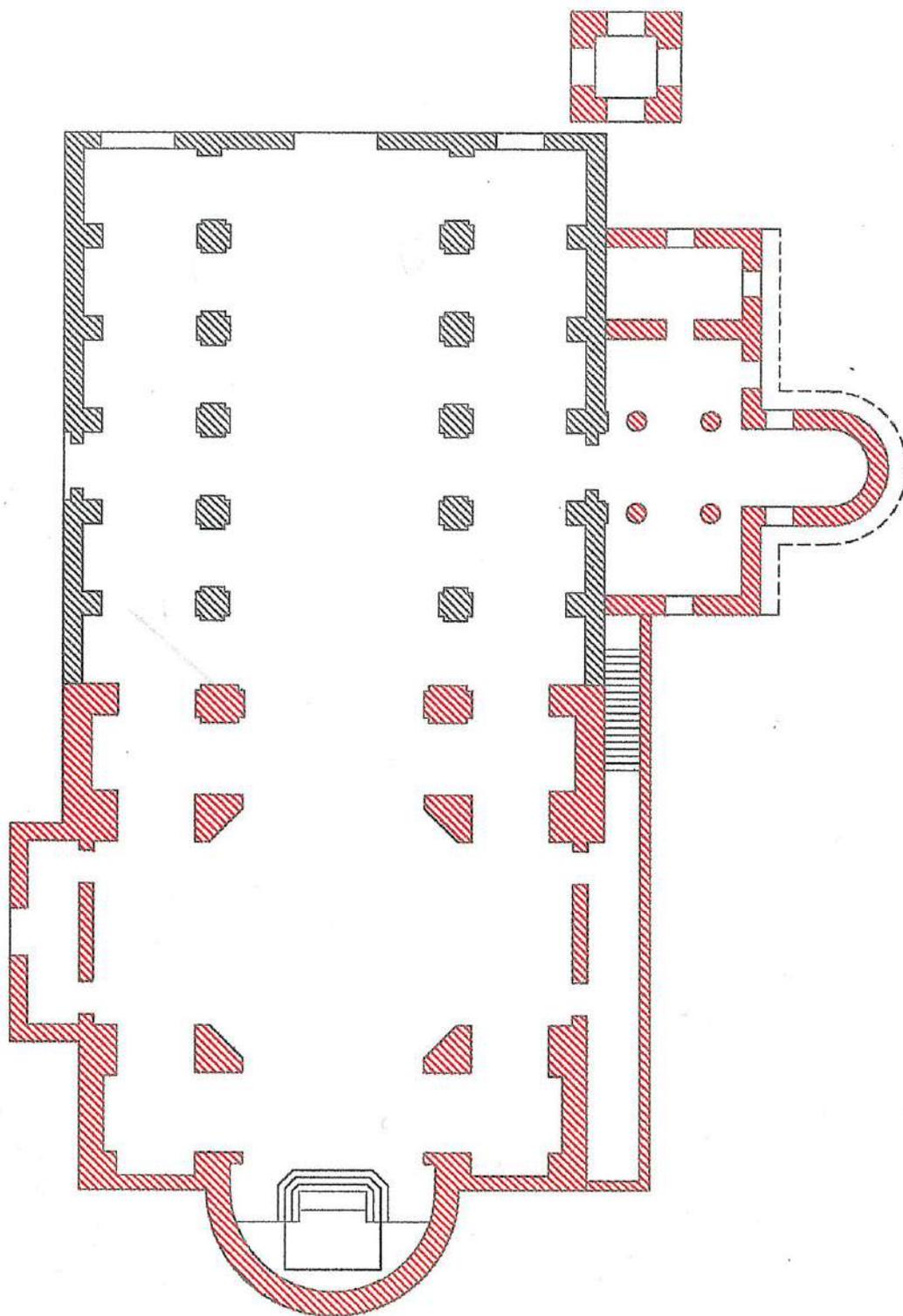
Data la scarsa resistenza a trazione della muratura, il provvedimento adatto ad evitare il crollo della struttura è la cerchiatura della zona dove si hanno sollecitazioni di trazione; essa si contrappone con la sua rigidità estensionale a tali sforzi, cercando di conservare la collaborazione circonferenziale degli anelli.

Infine si sono studiate le possibili strategie di intervento; da tale analisi sono emerse due tecniche, una basata su un metodo 'tradizionale', cioè mediante realizzazione di una cerchiatura metallica incassata nella muratura, che risulta di buona efficacia; l'altra, invece, utilizza materiali 'innovativi', ancora in fase di sperimentazione, come le fibre di carbonio preimpregnate con resine epossidiche, che presentano alcune problematiche, tra cui la non perfetta adesione al supporto

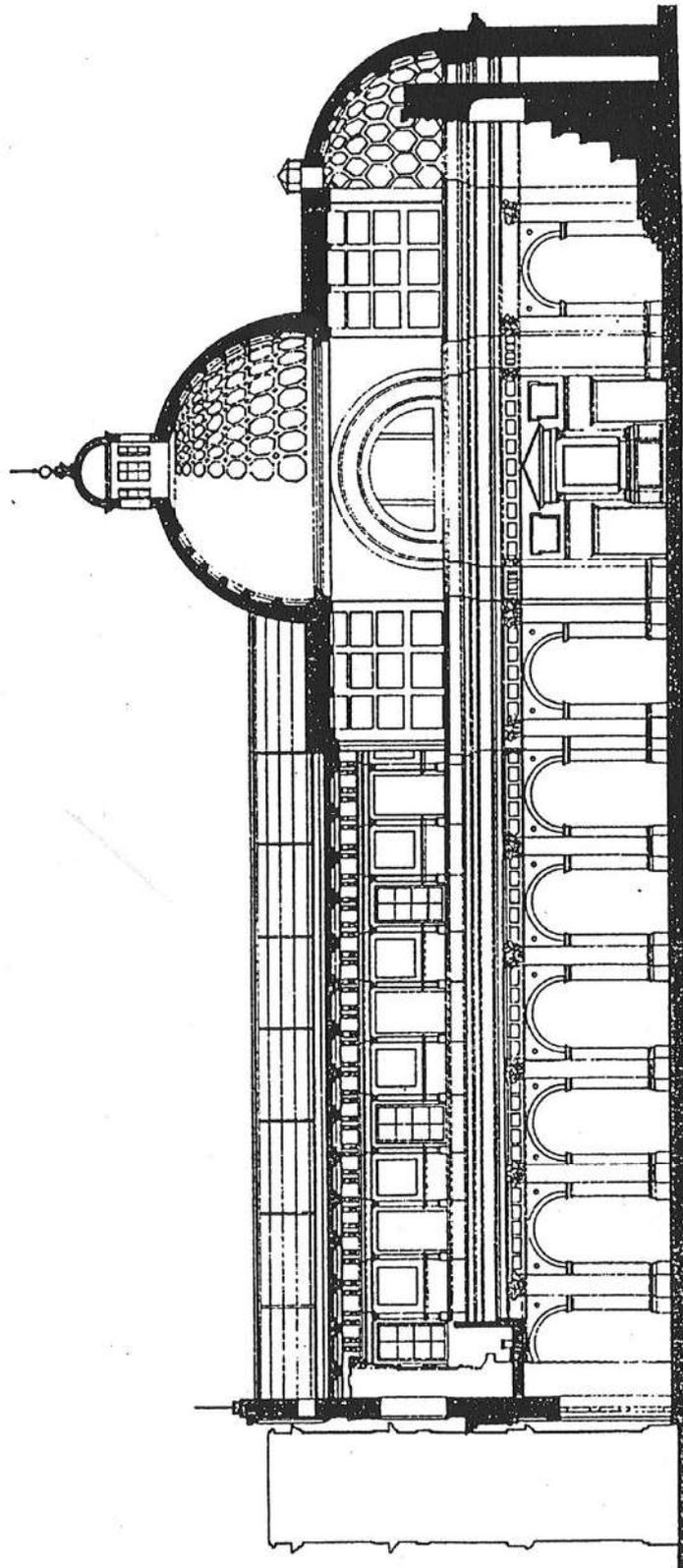
Pianta originaria della Chiesa (prima del 1800)



Pianta della chiesa allo stato attuale



 Ampliamento e modifiche del 1800



Sezione longitudinale

Indice

Capitolo I: ***Storia della concezione strutturale della Cupola***

1. Generalità.....	1
1.1 Evoluzione storica del modello di Cupola:	
1.1.1 Le origini del modello.....	2
1.1.2 Lo sviluppo del modello nell'epoca Romana e nel Rinascimento....	7
1.1.3 Le teorie sulle Cupole fino ai nostri tempi.....	15
1.2 Cenni sulle 'grandi' Cupole del passato.....	31
1.3 Il Mascheroni e il calcolo delle Cupole nel XVIII secolo.....	49
1.4 Metodi attuali di calcolo:	
1.4.1 La teoria membranale.....	65
1.4.2 Il metodo degli elementi finiti.....	73

Capitolo II: ***La Chiesa di Santa Maria a Mare in Maiori***

2. Generalità.....	79
2.1 Cenni storici della Chiesa.....	82
2.2 Materiali e tecniche costruttive adottate nel restauro del 1833... ..	91
2.3 Il Valente e il Neoclassicismo nel Napoletano.....	99

Capitolo III: ***Analisi statica della Cupola***

3. Generalità.....	113
3.1 Analisi statica della Cupola con la teoria membranale.....	114
3.2 Analisi statica della Cupola con il metodo degli elementi finiti.....	139
3.3 Interventi per la conservazione della struttura.....	164

Capitolo I

Storia della concezione strutturale della Cupola

1. *Generalità*

La cupola è una struttura che, oltre ad avere una sua valenza estetica, presenta alcuni vantaggi statici, come la possibilità di realizzare coperture di grandi ambienti, per lo più, di edifici a pianta centrale, organizzati in modo da rispettare le simmetrie della copertura.

Essa si può considerare come una volta generata dalla rotazione di una curva intorno ad un asse verticale, oppure come una volta a padiglione costruita su una pianta poligonale, con infiniti letti. Sotto il nome di cupola vengono, quindi, comprese anche le volte a padiglione ottagonali o basate su un altro poligono regolare, in quanto i principi costruttivi sono identici a quelli delle cupole di rivoluzione.

Alcune cupole in muratura si impostano su un corpo cilindrico o poligonale, detto tamburo, ordinariamente provvisto di finestre, che poggia a sua volta, o direttamente, oppure attraverso i cosiddetti pennacchi, sulla struttura sottostante; altre, invece, si costruiscono su pianta di forma poligonale, di solito quadrata, e vengono raccordate alla struttura portante mediante i suddetti pennacchi.

Le cupole delle chiese vengono, per lo più, provviste della cosiddetta lanterna, per dar luce all'interno dall'alto, costituita da un corpo cilindrico o poligonale chiuso superiormente da una piccola cupola o da un tetto conico.

La cupola presenta, anche, dei problemi statici, quali la spinta sulla struttura sottostante e, specialmente per le cupole emisferiche, la trazione nei paralleli nella zona tra l'imposta e la sezione al rene, di cui si era consapevoli fin dai tempi dei Romani, ma che sono stati dimostrati, in via teorica, solo negli ultimi secoli. Nell'evoluzione storica del modello strutturale della cupola, però, si è tentato di ridurre gli effetti prodotti dalle spinte con la costruzione di tamburi e contrafforti che contrastassero tali spinte oppure con un sistema di strutture spingenti alla base della cupola capaci di compensarle e di ridurre, anche, gli effetti della trazione nei paralleli con anelli più rigidi all'imposta oppure, specialmente nei lavori di restauro, con la cerchiatura metallica di tali zone.

Non bisogna dimenticare che esiste anche un regime flessionale che, per le cupole di spessore non piccolo, rispetto alla geometria, non può essere trascurato facilmente; oggi, grazie alle nuove tecnologie, si può arrivare alla progettazione di coperture di elevata luce e piccolo spessore; ciò rende trascurabile la rigidità flessionale rispetto a quella estensionale. Fino al XVIII secolo, però, si sono costruite cupole di spessore considerevole che comportava il problema dell'azione delle sollecitazioni flettenti sulla struttura.

1.1 Evoluzione storica del modello di cupola

1.1.1 Le origini del modello di Cupola

La concezione strutturale della cupola ha avuto un lungo iter nella storia con un'evoluzione delle tecniche costruttive, delle forme e dei materiali, ma

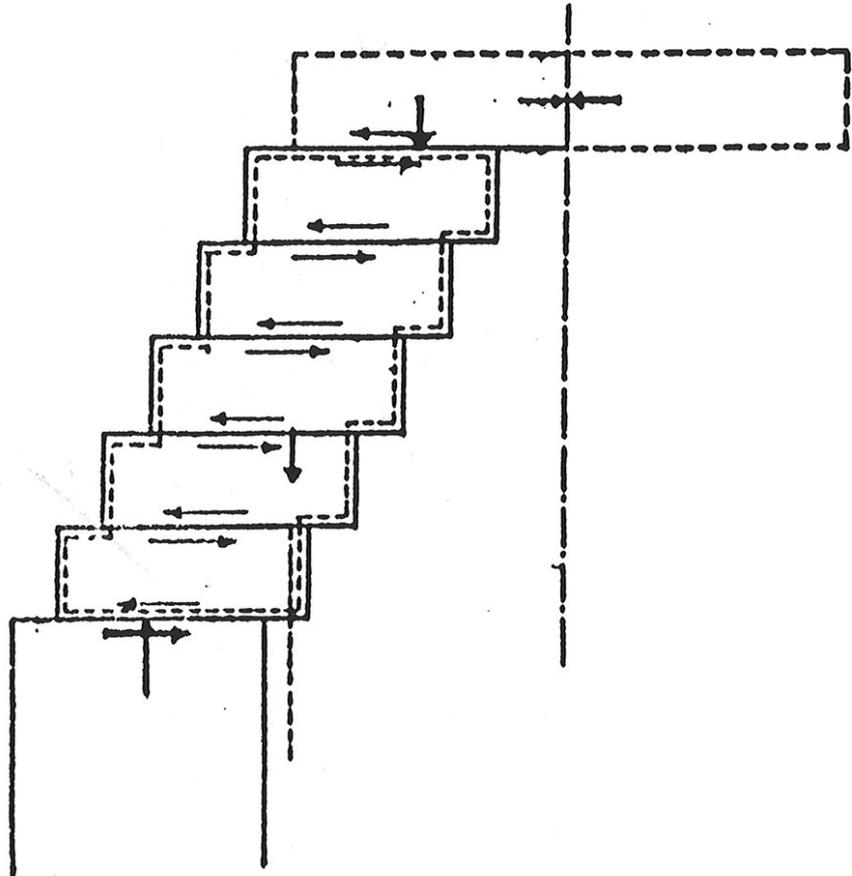
mantenendo, per lo più, gli stessi principi statici e quindi facendo apparire diversi i manufatti appartenenti a diverse epoche storiche.

Nella storia delle cupole possiamo distinguere vari tempi essenziali:

- a) *Paleocupole* : realizzate con anelli di conci sovrapposti con giunti orizzontali, ciascuno dei quali sporgeva a mensola sul corrispondente concio appartenente all'anello inferiore.
- b) *Cupole in muratura ordinaria* : realizzate con conci tronco-piramidali e giunti paralleli ai raggi principali di curvatura delle volte, cioè con giunti disposti lungo superfici coniche con centro sull'asse della superficie di intradosso.
- c) *Cupole nervate in ferro o in cemento armato*.
- d) *Cupole autoportanti in cemento armato o in alluminio*.

Il principio statico delle paleovolte è basato sul concetto di mensola; infatti, sono utilizzati dei conci molto grandi rispetto alla luce della volta e ognuno di essi è poco sporgente rispetto a quello inferiore verso il centro della volta; infine in chiave vi è un lastrone di chiusura. L'equilibrio alla rotazione intorno allo spigolo di imposta è garantito dalla presenza del lastrone di chiusura che deve risultare compresso e dalla presenza di sforzi tangenziali che equilibrino i momenti derivanti dal funzionamento del concio a mensola; l'azione degli sforzi tangenziali è dovuta all'effetto dell'attrito tra i conci scabri e ciò fa sì che la risultante delle azioni trasmesse dal giunto non sia verticale ma obliqua, tangente ad una vera e propria curva delle pressioni (*fig.1.1.1*). Quindi le paleocupole furono concepite sul principio di anelli di mensole con sempre una lastra di chiusura nel punto di chiave. Esse, anche se presenti in diverse regioni del

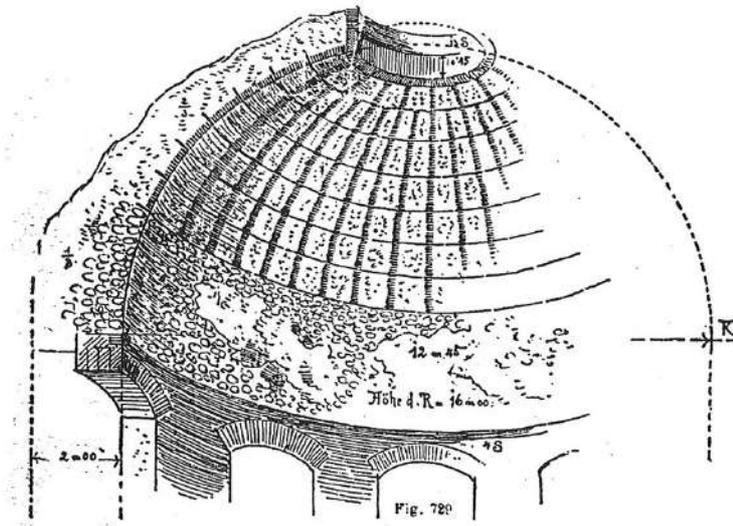
pianeta, ebbero particolare sviluppo nel bacino del Mediterraneo. Esempi di grandi luci coperte, di accurata esecuzione e di splendida decorazione, fondate sul principio di paleocupole, sono le tombe a cupola micenee, tholos, dette anche tesori.



(fig.1.1.1)

Nel II secolo a.C. i Romani con la costruzione di sepolcri diffusero il tipo della cupola di calcestruzzo a copertura di ambienti circolari, ereditando dagli Etruschi la tradizione di forme planimetriche rotonde e la struttura ad arco. Veniva gettato, su armature lignee, il conglomerato di malta, di calce e di pozzolana, costituente l'elemento coesivo di scaglie di pietre tufacee o vulcaniche, o anche

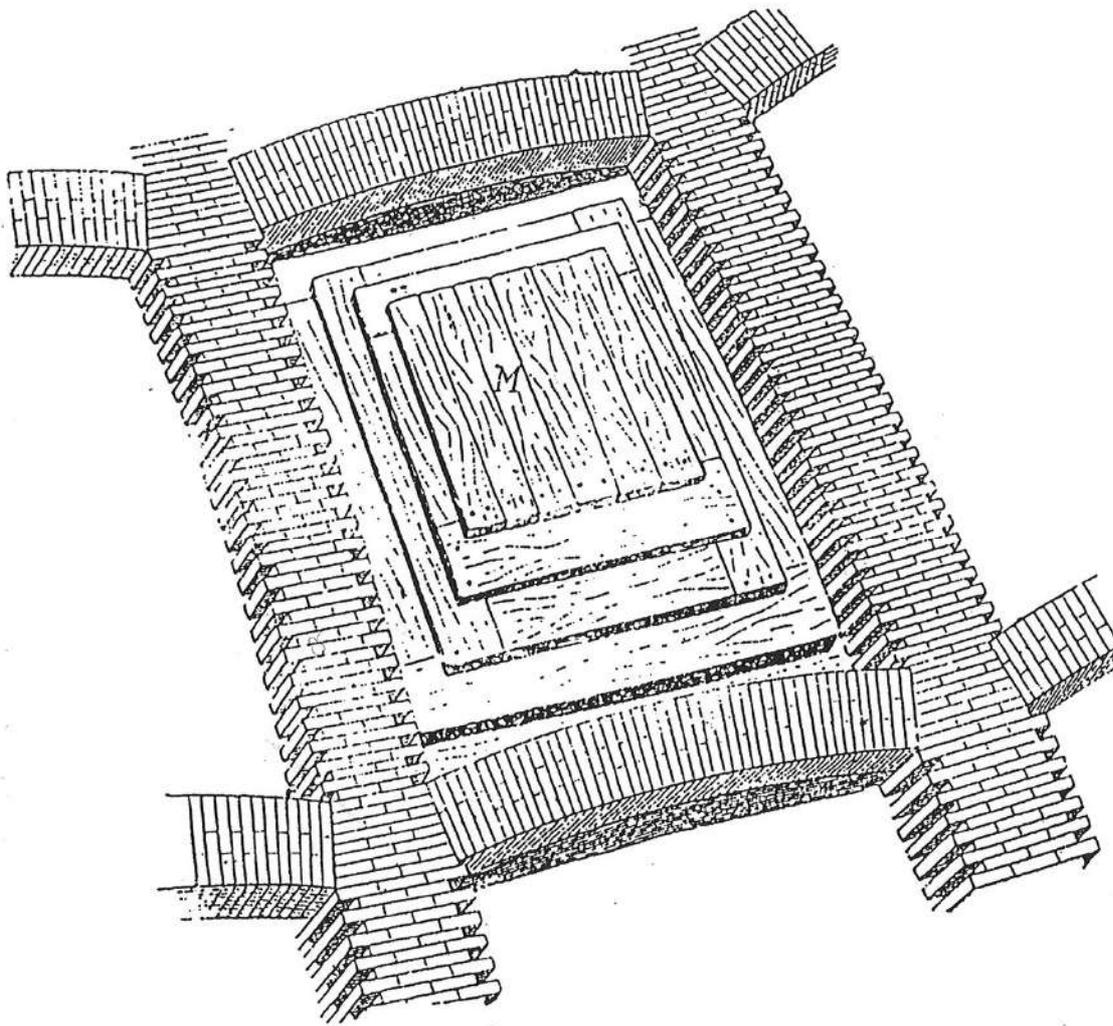
di frammenti di laterizio; tutto ciò costituiva una massa monolitica che metteva in evidenza i problemi statici delle spinte sui piedritti e delle trazioni nei paralleli ai reni(*fig1.1.2*).



(*fig1.1.2*)

I Romani cercarono una soluzione al problema di realizzazione della cupola, specialmente per la costruzione delle centine e per il problema del deflusso del calcestruzzo, ancora semifluido, verso le reni.

Alcuni tentativi furono quelli di realizzare forme provvisorie per il contenimento del calcestruzzo oppure forme perdute, lungo gli anelli, costituite da murature di laterizi. Infine si arrivò alla costituzione di cupole a cassettoni, in cui venivano realizzati prima gli archi meridiani in laterizi, su cui poggiavano gli archi lungo i paralleli, sempre in laterizi, tra due meridiani, e poi veniva gettato, con l'ausilio di casseforme collegati a detti anelli, il conglomerato (*fig.1.1.3*).



(fig.1.1.3)

Da questo bisogno tecnologico è nato il concetto delle nervature meridiane e degli archi di scarico paralleli, che ha portato a vari sviluppi delle tecniche costruttive e statiche delle cupole.

1.1.2 *Lo sviluppo del modello nell'epoca Romana e nel Rinascimento*

I Romani, come abbiamo detto prima, furono i primi a rendersi conto dei problemi statici delle cupole, ma anche dei vantaggi, cioè della possibilità di coprire grandi luci.

Essi intuirono la necessità di rendere leggera la struttura della cupola, ma nello stesso tempo di utilizzare materiali resistenti alle sollecitazioni che si creavano in essa. Tali sollecitazioni non erano note quantitativamente, ma attraverso esperienze passate erano ben evidenti le problematiche strutturali.

I Romani fecero dell'arco e delle coperture a volta il loro cavallo di battaglia nelle costruzioni di impianti termali, edifici dedicati agli dei, mausolei e, infine, chiese, acquedotti etc e conobbero bene i vantaggi e i difetti che queste strutture potevano presentare.

Gli archi furono fondamentali nelle costruzioni degli antichi acquedotti Romani, espressione della prima grande ingegneria idraulica.

I Romani non furono inferiori nelle costruzioni delle volte e delle cupole per le coperture di grandi ambienti con la loro ricerca di leggerezza nella struttura; essi, infatti, realizzarono dei conglomerati con inerti leggeri e studiarono la migliore geometria in funzione della luce e dei materiali da utilizzare.

Così venivano costruite cupole a spessore variabile e con spessore più ristretto verso il punto di chiave; ciò dimostra la loro capacità intellettuale nella ricerca dell'equilibrio della struttura. Infatti, solo da pochi secoli si è arrivati a dimostrare

l'efficacia di questa scelta progettuale che permette di ridurre gli effetti della trazione nei paralleli all'imposta.

Anche la loro capacità di mettere in opera queste strutture era notevole e ciò si può notare nella ricerca di tecniche costruttive sempre più avanzate e di nuove modalità di messa in opera per una più semplice e breve costruzione; basti pensare alle costruzioni di cupole a cassettoni, e quindi alla nascita di cupole nervate con getto di completamento di calcestruzzo.

Ai Romani erano noti anche gli effetti delle spinte sulle strutture di appoggio e la loro soluzione a questo problema fu di realizzare, dopo le prime esperienze, delle strutture spingenti alla base della cupola, capaci di contrastare tale spinta e quindi di creare un sistema di organismi spingenti che si compensassero tra di loro e dei muri perimetrali capaci di resistere all'azione di tali forze.

In alcune cupole furono anche realizzati dei rinfianchi che aumentavano la sezione resistente nella zona tra l'imposta e la sezione al rene, sempre, per ridurre gli effetti della trazione.

Infine, negli ultimi periodi di costruzioni romane, fu escogitato un sistema costruttivo che consentiva di realizzare delle volte ancora più leggere, anche se notevolmente resistenti : fu introdotto l'uso, come conci, di tubi o vasi di terracotta di forma rastremata.

Ciò che non cambia nelle costruzioni di cupole dell'età Romana è la geometria dell'intradosso, per lo più, sempre di forma sferica.

Tutte le opere di questa epoca furono poi di grande esempio specialmente per i grandi costruttori dell'epoca rinascimentale come il Brunelleschi e il Michelangelo, ma l'opera che fu più studiata da essi fu il Pantheon di Agrippa che ancora oggi viene considerato una grande opera di ingegneria.

Gli studi dei costruttori rinascimentali si soffermarono, per lo più, sulle lesioni che si erano verificate lungo i meridiani nella zona al rene nella cupola del Pantheon e sugli effetti prodotti dalle spinte sulla struttura di appoggio perimetrale.

Sul finire del XV secolo si registra l'inizio di vere e proprie ricerche intorno alla resistenza dei materiali. Infatti, gli studi di Leonardo sulla resistenza degli archi, delle travi e dei pilastri, le sue esperienze sulla rottura dei muri e le sue ricerche statiche vanno considerate quale primo fondamento di una moderna scienza delle costruzioni, sia pure nella tipica asistematicità delle enunciazioni teoriche vinciane.

Tra i suoi appunti e i suoi schizzi possiamo rintracciare intuizioni azzeccate, accenni promettenti, germi di idee che solo tre secoli dopo troveranno uno sviluppo.

Egli sosteneva che l'arco non è altro che una struttura geometricamente composta da due quarti di cerchio, ciascuno dei quali, preso singolarmente, non garantisce l'equilibrio, ma, insieme, si oppongono alle sollecitazioni dell'altro e rendono equilibrato il sistema; poi, egli arrivò, anche, ad intuire che l'arco non si sarebbe rotto se la corda dei due archi, che lo costituiscono, resta all'interno della fascia

di muratura; questo fu, praticamente, un'anticipazione della curva delle pressioni e della relativa condizione di equilibrio della struttura.

Nel periodo rinascimentale vi fu una notevole evoluzione della statica con la ricerca di quello che era il profilo migliore per la resistenza della struttura.

Oggi, si conosce, dal punto di vista teorico, il comportamento delle cupole come strutture di coperture e, individuando la superficie delle pressioni, se ne conoscono gli effetti. Infatti, sappiamo che per un profilo, di pressioni, emisferico si ha trazione nei paralleli dall'imposta alla sezione al rene, mentre per profili ribassati con reazione obliqua all'imposta, si riduce la zona di trazione, ma subentra il problema della spinta sulle strutture di appoggio.

Tutto ciò nel periodo rinascimentale si intuiva, ma non si conosceva a fondo e sicuramente non si teneva conto del fatto che la cupola in muratura poteva resistere con una delle sue infinite superfici di pressione contenute nello suo spessore .

Quindi, si svolsero degli studi basati principalmente sull'esperienza e sull'intuizione fisica che portarono a dei risultati che ancora oggi sono validi e che, solo dopo qualche secolo, furono dimostrati. Uno di questi, conseguenza dell'esperienza strutturale del gotico, che fu acquisita specialmente dal Brunelleschi, è la nozione che l'aumento del rapporto di monta migliora la stabilità per le cupole con giunti di imposta orizzontali. Questo concetto, oggi, è chiaro ed è dimostrabile attraverso le equazioni di equilibrio e confrontando i vari casi di sesto completo ribassato e sesto completo rialzato; infatti, si evince

che nelle cupole a sesto completo rialzato la trazione alla sezione di imposta è inferiore di quella del sesto ribassato.

Gli architetti posteriori al Brunelleschi procedettero per successive approssimazioni, una volta seguendo il principio di far crescere il rapporto di monta, altre volte tentando di modellare la struttura secondo un'accorta variazione della curvatura, ciò a loro sembrava coincidere con la ricerca della perfezione della sfera, cioè con una pura esigenza estetica della quale solo subconsciamente percepivano l'importanza statica.

Nel Rinascimento italiano vi fu la tendenza ad irrigidire la struttura con una costolatura e a contrastare la spinta con contrafforti e anche con il tamburo.

I contrafforti sono un provvedimento statico ovvio del quale si trovano esempi antichi, ma che sono per la prima volta definiti, anche dal punto di vista estetico, nella chiesa di Santa Sofia di Costantinopoli del VI secolo d.C.

Irrobustire una cupola con contrafforti è un provvedimento statico utile a sostituire parzialmente o totalmente la cerchiatura, che fu adottato nei tempi nei quali difficoltà tecnologiche impedivano di realizzare cerchiature efficienti.

L'introduzione dei costoloni ha irrigidito notevolmente la struttura, conferendogli anche resistenza flessionale; gli spicchi, interposti tra i costoloni, trasmettono parte dei loro carichi ai costoloni, lavorando specialmente nella direzione dei paralleli. A questo risultato statico si giunse empiricamente perseguendo delle pure esigenze esecutive.

Si introdusse, anche, l'apparecchio detto a spinapesce per il fatto che sulle costole si scarica gran parte del peso dell'intera cupola.

Questo dispositivo è tale che la faccia larga di ciascun mattone risulta quasi normale al maggior sforzo interno di compressione, questo è obliquo e non diretto secondo il meridiano, per effetto degli sforzi di taglio T , tangenti alla superficie, che nascono dalla presenza di costoloni più rigidi rispetto agli spicchi e dalle particolari condizioni di appoggio della cupola.

Quindi, negli spicchi compresi tra i costoloni, le isostatiche non sono dirette secondo i meridiani e i paralleli, ma sono oblique; infatti, in queste sezioni, meridiane e parallele, oltre agli sforzi normali vi sono anche sforzi di taglio che trasferiscono il peso degli spicchi ai costoloni.

Anche il Brunelleschi si convinse del fatto che i carichi si trasferiscono anche in direzione circonferenziale.

Quindi nei suoi studi intesi a progettare un apparecchio che gli consentisse di girare le cupole senza bisogno di centine, si fermò sulla soluzione di costruire delle catene oblique di mattoni che danno appoggio a tutta la muratura.

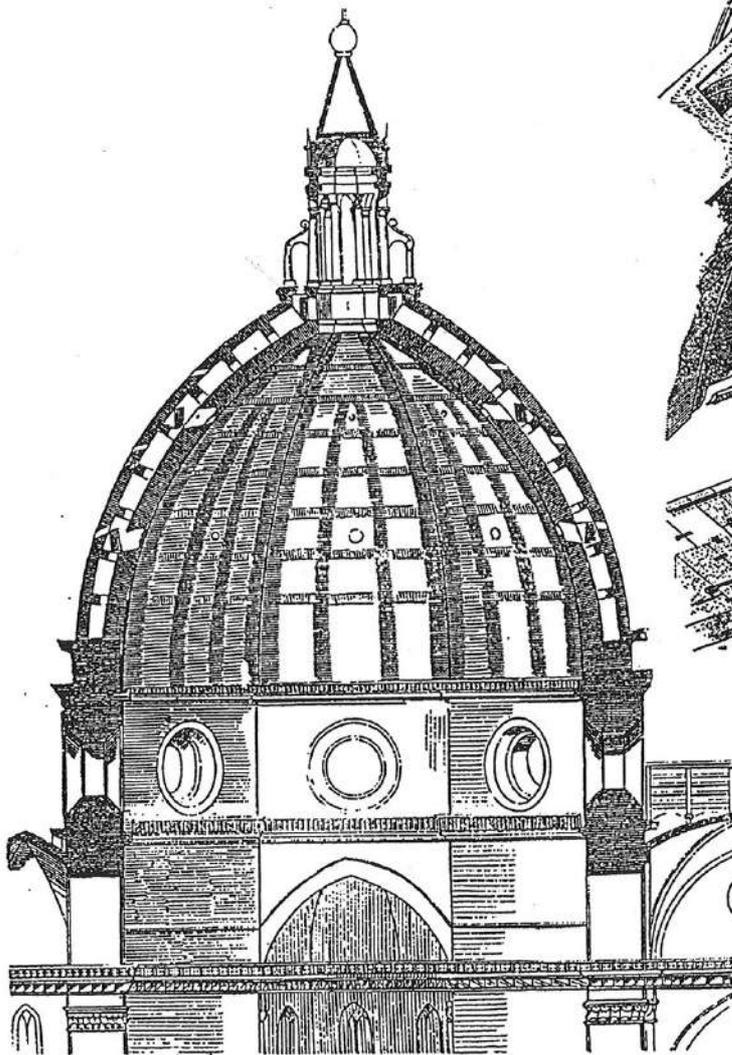
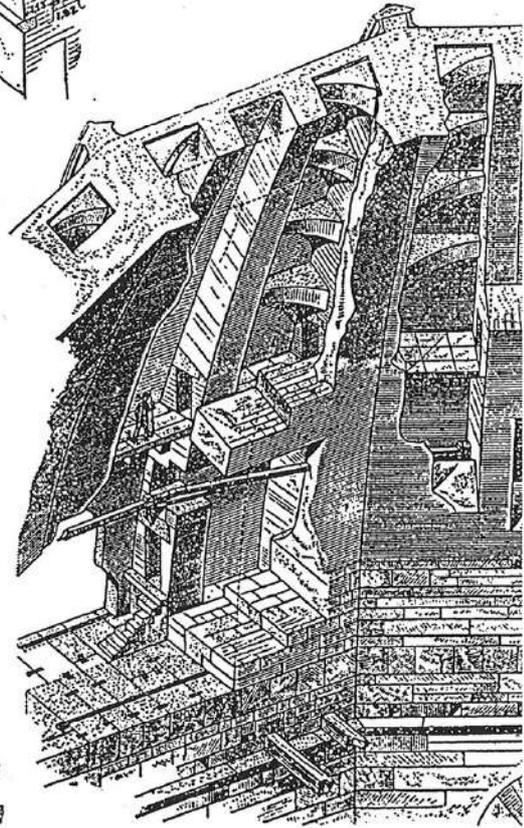
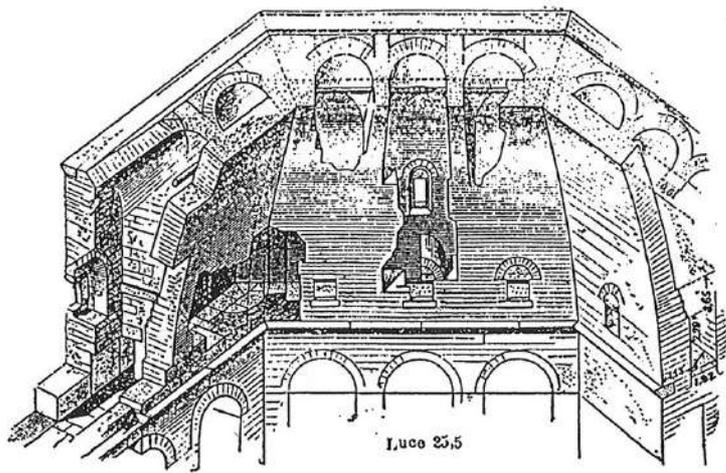
Questa soluzione ha il pregio di decomporre la massa muraria degli spicchi cilindrici in elementi che si appoggiano per contrasto l'uno all'altro e quindi, nel caso della volta a padiglione, ai costoloni.

Si può dire, sicuramente, che il Brunelleschi abbia studiato a fondo un metodo per la costruzione della cupola senza l'onere della centinatura e anche una geometria adatta per realizzare ciò. Si può ipotizzare che la scelta architettonica,

di un profilo a padiglione di stile gotico per la cupola delle Cattedrale Santa Maria del Fiore di Firenze, che mantenesse le proporzionalità proprie della chiesa, lo abbia indirizzato verso questa scelta esecutiva; infatti, si può supporre che la forma slanciata verso l'alto, unitamente alla costruzione per anelli che sporgevano a mensola su quelli inferiori, ma non di molto in modo tale da non far crollare la struttura, e alla buona resistenza offerta dall'attrito e dalla coesione della malta, anche se ancora liquida, siano stati gli elementi fondamentali per la realizzazione di questa grande opera (fig.1.1.4).

Infatti quando si procede alla costruzione di una cupola in muratura, la prima attenzione è rivolta alla sua forma, e quindi alla scelta della centinatura, e poi se si deve o no fare uso del manto, insieme di tavole poste sull'armatura principale per formare la sagoma della cupola. Il manto è necessario per le cupole in conci di pietra, ma si può omettere per le cupole in mattoni, disponendo le centine una vicino all'altra, ad uguale distanza tra loro, in modo che si incontrino tutte in chiave. Evidentemente gli strati inferiori si possono porre facilmente in opera senza manto, perché il loro piano di posa si scosta poco dall'orizzontale e ciascuno strato forma un anello chiuso, che non ha bisogno di altro appoggio. Inoltre si deve curare la posizione dei giunti in modo che siano normali all'intradosso; ciò si ottiene con il tendere un filo dal centro fino all'intradosso della volta.

In generale la parte più difficile da costruirsi di una cupola, e specialmente di quella sferica, è quella in chiave, perché i giunti riescono troppo vicini alla verticale, ed i mattoni hanno una forma troppo poco conica. Si cerca quindi di



(fig.1.1.4)

fare più grande possibile il cuneo di chiave, oppure rendere più leggera la zona in chiave costruendola con mattoni leggeri.

Per questa ragione e perché la chiave offre la posizione più adatta per una apertura, che dia luce ed aria al locale coperto dalla volta, si omette del tutto la zona in chiave e si chiude la copertura con la cosiddetta lanterna.

1.1.3 Le teorie sulle Cupole fino ai nostri tempi

Nel XVIII secolo vi è una svolta significativa sulla costruzione e sulla teoria delle volte e degli archi, che portò poi a migliori risultati nel secolo XIX, e che permise uno studio più approfondito delle problematiche strutturali e costruttive delle volte in genere.

In realtà, dal punto di vista teorico, vi furono impacciati tentativi, spesso addirittura erronei, sull'equilibrio delle costruzioni in pietra.

Gli studiosi di quel tempo ebbero una buona intuizione a considerare i conci di muratura dell'arco come porzioni di cunei incidenti sui giunti tra le pietre; ma, basavano la loro teoria sull'ipotesi di assenza di attrito, non valutando l'azione della malta sui conci.

Solo verso la fine del settecento, Coulomb formulò le cosiddette leggi di attrito, e da ciò andò alla ricerca dell'equilibrio delle strutture in presenza di attrito tra i vari materiali costituenti il complesso murario.

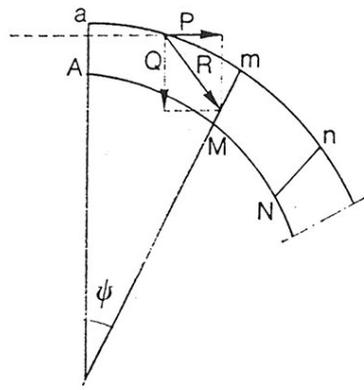
In quel periodo il problema principale era quello di trovare uno spessore adeguato della volta, essendo assegnata la geometria e messa, quest'ultima, in relazione con i carichi; l'altro era di determinare lo spessore dei piedritti di

sostegno dell'arco, sfruttando un possibile meccanismo di collasso, cioè attraverso un abbozzo di calcolo a rottura della muratura.

Intorno agli anni 30 del secolo XVIII si ha, con il Bouguer, una prima teoria sulle cupole che si basa sull'equazione differenziale di una catenaria 'rovesciata'; infatti, in quegli anni si sviluppò il problema intorno al tema dell'equilibrio funicolare e alla cosiddetta catenaria, posizione assunta da una fune pesante fissata alle sue estremità.

Il Bouguer partì da questo presupposto e determinò analiticamente le condizioni di equilibrio ottenendo un'espressione che definiva la superficie della cupola omogenea equilibrata, come riferimento per una qualsiasi curva che si traccia da uno stesso vertice; egli affermava che ogni altra curva, che genera una superficie di rivoluzione, che spiccandosi dallo stesso vertice si slarghi più di quella equilibrata dall'asse, mantenendosi ovunque meno concava, poteva descrivere una cupola equilibrata.

Il contributo più lineare, arrivò, alla fine del settecento, da parte del Mascheroni, matematico bergamasco, che approfondì il concetto fondamentale perseguito, durante il XVIII secolo, nel calcolo delle cupole in muratura : mentre nell'arco in cui gli sforzi di compressione dovevano essere ortogonali ai letti di malta tra i conci, nell'ipotesi di assenza di attrito, nella cupola è sufficiente che la risultante tra la spinta in chiave e il peso della parte sovrastante, pur obliqua al giunto, cada 'con maggior pendenza', cioè che essa deve tendere verso l'interno della cupola e quindi creare compressione negli anelli (*fig.1.1.5*)



(fig.1.1.5)

Il Mascheroni, infatti, basò la sua teoria sul concetto di collaborazione degli anelli paralleli con i meridiani per il sostegno statico della struttura. Egli da ciò ne trasse dei risultati analitici che si avvicinano molto al comportamento reale della copertura; infatti, egli arrivò a dimostrare che per una cupola emisferica di spessore costante, si ha trazione nei paralleli dall'imposta al giunto al rene.

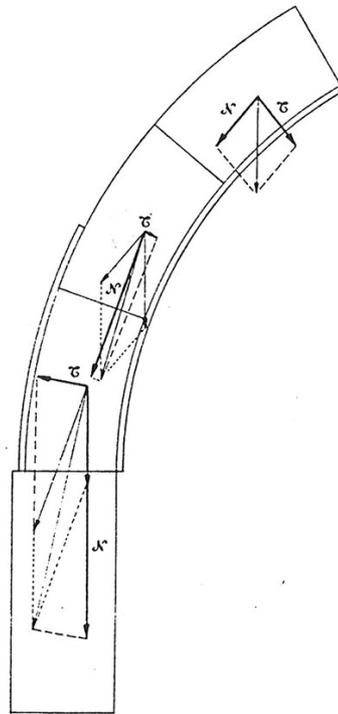
Da ciò possiamo trarre la conclusione che l'architetto Valente, costruttore della cupola della chiesa di Santa Maria a mare a Maiori, era a conoscenza di queste teorie e delle problematiche riguardanti questo tipo di copertura.

Tutti questi studi servirono come introduzione a delle teorie del secolo XIX che contribuirono a definire le curve e le superfici di pressione e le condizioni di equilibrio per le volte e gli archi, in presenza di attrito.

Vi furono progressi nel XVIII secolo, non solo dal punto di vista teorico, ma anche nelle tecniche e nelle problematiche delle costruzioni di volte in muratura.

Dei problemi che insorgono nel corso della realizzazione di una volta se ne occupò il Salimbemi, a cavallo tra il XVIII e il XIX secolo; egli riconobbe il pericolo di sfiancamento dei conci dall'imposta al rene per azione della

componente trasversale rispetto alla linea di intradosso, che cambia segno al di sotto della sezione al rene (*fig.1.1.6*)



(*fig.1.1.6*)

Altro risultato, ben più importante, fu la realizzazione di cupole in muratura con spessori ridotti rispetto a quelle antecedenti, ciò fu di presupposto per le volte in cemento armato sottile.

La giustificazione oggettiva del fatto che nelle cupole del tardo barocco ed in quelle moderne si hanno gli stessi rapporti dimensionali sta nel fatto che tanto le lastre curve sottili in cemento armato, armate nella fibra media, quanto le murature ordinarie sformate quando la malta è ancora assai viscosa, sono idonee a realizzare strutture che lavorano, per lo più, a compressione biassiale, secondo i meridiani e secondo i paralleli.

Riportiamo, ora, la teoria formulata dall'ing. Guido Guerra, che, intorno alla metà del nostro secolo, si occupò delle problematiche inerenti alle cupole antiche e moderne, sulla buona intuizione, che ebbero architetti del settecento, sul comportamento della muratura e dei vantaggi apportati dal disarmo della muratura quando la malta è ancora viscosa.

Le murature ordinarie, composte di conci le cui dimensioni minime variano dai 6 cm del mattone ai 20-25 cm della pietra e di strati di malta 1-3 cm di spessore, possono essere considerate un materiale omogeneo, nel senso che i singoli componenti concorrono a creare un comportamento complesso della muratura, per cui potremmo definire in essa tensioni medie, deformazioni etc.

Con questa riserva circa le definizioni, possiamo considerare il comportamento della muratura come quello di un tutto unico, distinguendo i seguenti stadi:

Stadio preliminare : i conci di pietra possono adattare la loro posizione reciproca nei limiti della plasticità, via via decrescente, della malta. I piccoli spostamenti dei conci, ed il rifluimento della malta plastica, avvengono in generale nel senso di uniformare o almeno regolarizzare la distribuzione delle pressioni sui letti di separazione tra concio e concio.

Questo adattamento avviene in due periodi distinti: precedente e successivo al disarmo dell'opera.

Il regime degli sforzi interni è, in entrambi i periodi, staticamente indeterminato, sia per la forma assai complessa che di solito hanno le strutture murarie, sia per

vincoli esterni forniti dagli appoggi definitivi e provvisori (centine, casseforme) ma è, nei due periodi, certamente diverso.

In altri termini, quando si procede al disarmo, i conci, che hanno adattato la loro posizione ad un certo regime di sforzi compatibile con i vincoli che hanno nel primo periodo, tendono ad assumere una nuova posizione, impediti questa volta dalle sia pur limitate reazioni che comincia a fornire la malta che intanto va facendo presa. E' chiaro che per riconoscere gli sforzi interni che si stabiliscono in una muratura in questa prima fase, si dovrà tenere conto della relativa libertà di movimento che hanno i singoli conci finché la malta non si sia consolidata.

Si dovrà tenere conto inoltre anche degli effetti del ritiro della malta che, protraendosi ad indurimento avanzato, produce coazioni interne la cui entità varia a seconda della forma del manufatto, dello spessore del letto di malta e del grado di aderenza raggiunto.

Primo stadio : quando la malta ha perduto la sua originaria viscosità ed ha contemporaneamente sviluppato le sue caratteristiche di resistenza meccanica e la aderenza con le pietre, il complesso della struttura muraria acquisita una certa monoliticità che va poi gradualmente aumentando al progredire dell'indurimento della malta.

Le caratteristiche di deformabilità della malta tendono ad assumere lo stesso ordine di grandezza di quelle delle pietre, perché i rifluimenti plastici non sono più possibili e l'aderenza fra pietra e malta è tale che non è più concepibile un diverso assestamento delle due essenze. In questa fase è quindi praticamente

realizzata nelle murature l'ipotesi della omogeneità. Con analogo ragionamento si può ritenere sufficientemente verosimile l'ipotesi dell'isotropia.

Allorquando sulla struttura già consolidata vengono a gravare i carichi esterni, avvengono delle deformazioni che, se i carichi restano di entità limitata rispetto alla robustezza delle strutture, possiamo considerare proporzionali alle pressioni. In questo stadio si possono, perciò, considerare applicabili alle murature i risultati della teoria dell'elasticità.

Secondo stadio : non occorre enumerare le molte possibili cause di sgretolamento delle malte : osserviamo soltanto che poiché la composizione della malta non è certamente uniforme in tutta l'opera, e poiché le cause esterne variamente influiscono nelle varie zone dell'opera stessa, in un primo momento si creano soluzioni di continuità in corrispondenza di alcuni giunti e generalmente non per tutta la profondità di ciascun letto di separazione fra filare e filare.

Si deve tenere conto che i carichi di rottura a trazione della muratura sono mediamente da dieci a venti volte minori di quelli a compressione. Pertanto, qualora le cause meccaniche siano predominanti sulle altre, le prime rotture avvengono nei piani perpendicolari alle linee di massima trazione.

Stadio estremo : le prime soluzioni di continuità ed i primi sgretolamenti della massa muraria, a qualunque causa siano dovute, portano come evidente conseguenza l'accentuarsi del valore degli sforzi massimi di trazione ideale nelle zone vicine a quelle che, per aver ceduto, non sono più in grado di assorbire la loro parte di carico.

Le prime lesioni iniziali si andranno perciò estendendo, fino a congiungersi tra di loro, formando delle uniche grandi lesioni, il cui andamento non è determinabile con le stese considerazioni fatte per il primo e secondo stadio, perché dipende dall'ordine in cui si susseguono le prime lesioni, dai movimenti che subiscono le varie masse murarie isolate nella formazione delle lesioni.

Le lesioni potranno infatti addirittura estendersi fino ai margini dell'organismo murario che verrà, così, ad essere frantumato in parti isolate.

Non è ancora detto che questo debba significare il crollo dell'opera, in quanto l'organismo murario, in questa fase della sua vita, può talvolta trovare una nuova condizione di equilibrio per effetto dei vincoli interni ed esterni superstiti.

In altri termini il crollo non avverrà se i grossi blocchi nei quali le lesioni hanno suddiviso l'opera muraria possono ancora trovare un nuovo particolare equilibrio che li mantenga a sesto per mutuo contrasto. Alcune delle grandi cupole, si trovano in un tale regime di equilibrio; tra queste, esempio notevole, quella del Pantheon.

Sempre nel XVIII secolo, e precisamente nella seconda metà, si sviluppò l'arte neoclassica come reazione alle ultime e meno valide espressioni del barocco e come ricerca di modelli dell'antichità, attraverso i quali realizzare delle opere artistiche che tendessero alla bellezza ideale.

Gli artisti di quel periodo erano convinti che solo i Romani e i Greci erano riusciti a raggiungere questo ideale; di ciò erano consapevoli anche gli artisti e gli architetti rinascimentali, ma questi avevano studiato le opere, specialmente quelle

romane, e da queste avevano sviluppato la loro idea in modo differente, mentre i Neoclassici avevano interpretato alla lettera tali modelli, molte volte troppo rigorosamente.

Per quello che riguarda il nostro discorso, mentre gli architetti rinascimentali si erano preoccupati di sviluppare il modello di cupola introducendo degli irrigidimenti, come i costoloni e i contrafforti, i neoclassici non ricercarono nuove soluzioni, ma riproposero tecniche costruttive e teorie già usate, specialmente in epoca romana.

Un esempio di tutto questo discorso può essere la cupola della Basilica di San Francesco di Paola a Napoli che ripropone strutturalmente e geometricamente il modello di cupola del Pantheon di Agrippa a Roma.

Gli architetti di questo periodo conoscevano bene, quindi, le varie tipologie di cupole, quella a bacino, per lo più emisferica, e quella a padiglione, e anche le varie soluzioni di appoggio di queste coperture.

All'inizio abbiamo detto che la cupola può essere impostata su un appoggio continuo, come lo è il tamburo, oppure, se la si vuole costruire su una pianta quadrata, su i cosiddetti pennacchi, i quali hanno una loro funzione statica.

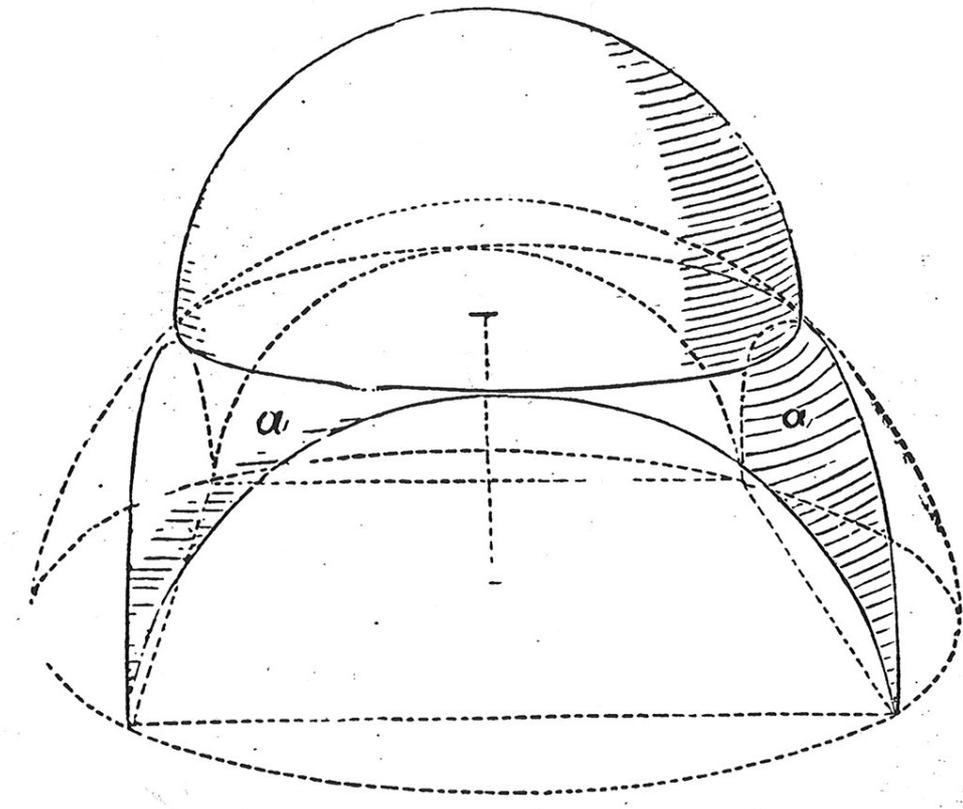
Ora, noi vogliamo approfondire la condizione di appoggi isolati di una cupola perché ci riguarda da vicino in quanto la cupola della chiesa Santa Maria a mare di Maiori è impostata su pennacchi.

I primi ad utilizzare questo tipo di sistema di appoggio furono gli Etruschi, che usarono la tecnica costruttiva delle paleovolte, per mensole successive sporgenti.

La funzione statica di questi pennacchi è quella di contrastare la spinta della calotta; infatti, questi presentano una buona rigidità estensionale che si contrappone a quella della cupola che tende ad aprirsi all'imposta. La presenza di tali strutture di sostegno varia, però, tutte le sollecitazioni interne alla copertura; infatti le isostatiche non seguono più le direzioni dei meridiani e dei paralleli, ma nascono degli sforzi di taglio, tangenti alla superficie, per effetto delle particolari condizioni di appoggio, che fanno mutare le direzioni principali degli sforzi; infatti la struttura tende a scaricare tutto il suo peso sugli appoggi discontinui, e ciò fa sì che si crei una zona di compressione vicino ai pennacchi e che le isostatiche cambino.

La resistenza della struttura è garantita dal concatenamento dei conci con giunti secondo i piani meridiani e i piani tangenti alle superfici coniche passanti per i cerchi meridiani della superficie di intradosso, e dalla resistenza a taglio delle malte.

Il problema di impostare una cupola su pianta quadrata è stato uno dei principali motivi di studio nella storia dell'architettura, risolto a pieno con l'invenzione dei pennacchi sferici, elementi di una volta a vela impostata su quattro pilastri e troncata da un piano orizzontale che ne sega l'intradosso in un cerchio sul quale può svolgersi una calotta, elemento della stessa sfera a cui i pennacchi stessi appartengono; oppure appartenenti a un'altra superficie di rivoluzione che offre la base circolare all'anello di imposta della cupola(fig.1.1.7). Questo è appunto il caso della chiesa di Santa Sofia di Costantinopoli.



(fig.1.1.7)

Fino al XIX secolo abbiamo visto che le cupole venivano realizzate, per lo più, in muratura di mattoni, di pietre di tufo etc, con malte di calce e pozzolana oppure a cassettoni con riempimento di conglomerato leggero per la presenza di alcuni materiali come la pomice e con altre tecniche costruttive che utilizzavano come concetto base la muratura.

Nel 1800 vi fu un notevole sviluppo delle tecnologie dei materiali; infatti intorno alla metà del secolo Aspden trovò la formula chimica della pietra di Portland che consentì la realizzazione della composizione chimica del cemento, legante idraulico che permette la costituzione con altri materiali come la sabbia e la ghiaia del conglomerato cementizio, e dopo alcuni anni a quest'ultimo fu

abbinato l'acciaio essendo stato sperimentalmente scoperto che il calcestruzzo presenta una bassa resistenza a trazione rispetto a quella di compressione.

In questo secolo si incominciò a sviluppare anche l'impiego in edilizia del ferro forgiato e poi dell'acciaio, che vennero utilizzati per la costruzione di cupole reticolari.

Queste coperture metalliche hanno, però, un capostipite di età antica nella copertura della sala solare delle Terme di Caracalla, realizzata in bronzo con orditura a doppia curvatura e rivestimento in lamiera.

In realtà il ferro era stato utilizzato nelle cupole in muratura creando delle catene e delle cerchiature per far fronte alle sollecitazioni di trazione, ma nel XIX secolo si è arrivati al concepimento di coperture metalliche di grandi luci che presentano un buon livello di leggerezza e resistenza.

Queste strutture metalliche sono state realizzate, ovviamente, con un sistema reticolare in cui gli elementi portanti sono gli arconi meridiani e gli anelli lungo i paralleli collegati agli arconi principali e spesso sono presenti delle controventature che possono essere realizzate con aste collegate tra due nodi di congiunzione dei meridiani e paralleli oppure da lamiere di rivestimento. (Cupole Schwedler 1863)

Gli arconi meridiani poggiano su un anello di base, che garantisce anche una certa resistenza alle spinte degli arconi, e solitamente, su un anello in chiave che ha anche una sua funzionalità, cioè quella di permettere l'illuminazione dell'ambiente se questa non è altrove consentita.

Lo schema statico delle cupole metalliche è semplice e sembra derivare da quello delle cupole a cassettoni; infatti, le aste lungo i meridiani e i paralleli collaborano a resistere per carichi verticali e simmetrici, e grazie alla buona resistenza a trazione dell'acciaio, non ci sono problemi all'imposta, ma l'unico accorgimento importante è nel prevedere un anello alla base capace di contrastare le spinte degli arconi meridiani; invece, per carichi non verticali, in presenza di vento o di sisma, e quindi dissimmetrici, è la controventatura ad entrare in gioco e a garantire la resistenza della struttura.

Oggi, seguendo questa tipologia, si costruiscono grandi coperture in legno lamellare.

Comunque dobbiamo dire che vi fu anche una storia delle cupole lignee attraverso l'architettura mussulmana, ravennate e romanica e fino alle grandi costruzioni sei-settecentesche, di tutta Europa, generalmente appoggiate a sottostanti cupole di murature.

Nei primi anni del XX secolo andò sviluppandosi anche la volta di cemento armato sottile e con essa nacque la teoria membranale.

Con queste coperture si possono coprire luci dell'ordine dei 30 metri con spessori di calcestruzzo, armato lungo la fibra media, di circa 10 cm e si potrebbero adottare spessori ancora minori se non vi fossero due ostacoli : uno è tecnologico, perché non si potrebbe più definire omogeneo un materiale che ha lo spessore comparabile con le dimensioni degli inerti, e perché comunque bisogna rispettare degli spessori di copriferro minimo; l'altro ostacolo, che è molto

insidioso, è quello dell'instabilità per la quale non esistono modelli di calcolo molto affidabili.

La teoria membranale si adatta bene a questo tipo di coperture perché considera la struttura resistente in modo bidimensionale con sforzi lungo la superficie e regime flessionale trascurabile; infatti lo spessore esiguo rende trascurabile la rigidezza flessionale rispetto a quella estensionale.

In effetti, questo regime di sollecitazioni secondario assume un peso rilevante solo nella zona di superficie a contatto con le strutture di bordo, i timpani, e per questo si parla di effetti di bordo.

Nella teoria membranale la volta è considerata come se fosse libera di deformarsi nella maniera più opportuna senza preoccuparsi che sul contorno ci sono dei vincoli cinematici rappresentati dai timpani; nasce quindi un problema di congruenza di deformazione che genera il regime secondario di flessione e taglio che tende a ripristinare la congruenza tra le due strutture. Tali effetti si smorzano abbastanza rapidamente per la notevole rigidezza estensionale degli anelli lungo i paralleli. Tale inconveniente si risolve, in genere, raddoppiando le armature inferiori e superiori nella zona di imposta per fronteggiare le sollecitazioni di flessione.

Invece per quanto riguarda le azioni che possono arrecare danni alla struttura, ricavabili dalla teoria membranale, cioè la trazione e la spinta sulle strutture di appoggio, le soluzioni sono quelle di disporre le armature secondo le linee isostatiche affinché tali armature collaborino con il calcestruzzo e assorbano le trazioni massime ; per quanto riguarda le spinte sulle strutture sottostanti, si può

pensare di utilizzare delle catene in cemento armato o precompresso che contrastino tali spinte.

Vediamo un po' quali sono le varie procedure di costruzione di coperture di tale tipo in cemento armato che si sono succedute nel tempo.

Un primo procedimento è quello di realizzare prima la rete delle armature, in modo che abbia in sé una certa rigidità, mettendola in opera con una leggera impalcatura girevole; il getto del calcestruzzo, entro forme appese all'armatura, è eseguito mediante iniettori.

Altro procedimento è quello di costruire su un castello di appoggio l'orditura principale della centina, costituita da elementi disposti secondo meridiani e paralleli.

Se la struttura è dotata di notevole simmetria e se si dispongono di adeguati mezzi d'opera, il castello di sostegno si può limitare ad un'opera che tenga in posizione l'occhio centrale, primo ad essere messo in opera, e la centina si costruisce soltanto per due spicchi della cupola, diametralmente opposti. Quando il getto di questi due spicchi si è consolidato, si disarmo la centina senza demolirla. Successivamente, facendo ruotare la centina intorno all'asse della cupola e rialzandola, la si pone di nuovo in posizione per il getto della seconda coppia di spicchi.

Per evitare o ridurre le difficoltà ed il costo dei sostegni provvisori nelle cupole sottili, si adoperano di solito due sistemi, che le riducono però piuttosto a cupole murarie che non a strutture di calcestruzzo vero e proprio.

Il primo sistema, il più antico, consiste nel realizzare le cupole sottili costruendole per conci, come se fossero di muratura ordinaria.

L'altro sistema, particolarmente adatto alle costruzioni in calcestruzzo per ridurre l'onere dei sostegni provvisori, è quello della prefabbricazione.

Nelle costruzioni contemporanee, venuta meno l'istanza della monumentalità, passa in prima linea quella della leggerezza.

La leggerezza comporta, oltre alla economia, la possibilità di coprire spazi sempre maggiori. Si è così giunti all'impiego delle leghe di alluminio, materiale che ha una lunghezza critica pari a quella degli acciai speciali e quindi due o tre volte maggiore di quella dei comuni acciai di costruzione.

Un'altra teoria che si è diffusa intorno agli anni 40 del secolo XX e che può essere applicata a strutture di questo genere è la teoria degli elementi finiti. Tale teoria si basa sulla discretizzazione del solido in un numero finito di elementi collegati in un numero finito di punti nodali e sfrutta il metodo delle deformazioni.

Quello di cui abbiamo parlato fino ad ora è lo sviluppo del modello di cupola e delle teorie ad essa inerenti fino ai giorni nostri, ma a noi interessa soprattutto le conoscenze su questo tipo di copertura nel periodo di realizzazione della cupola della chiesa Santa Maria a mare a Maiori, cioè tra 1830 e il 1860.

Innanzitutto è bene capire a quale modello statico l'architetto Valente abbia fatto riferimento e quale siano state le teorie sulla statica a conoscenza in quel periodo.

In secondo luogo conoscere quali materiali e quali tecniche costruttive abbia adottato per la costruzione di tale copertura. Infine ci proponiamo di analizzare, attraverso teorie moderne, le problematiche strutturali.

1.2 Cenni sulle grandi Cupole del passato

Analizzando il quadro storico dello sviluppo statico delle cupole si individuano due categorie principali che si sono succedute nel tempo.

Tali categorie sono le seguenti :

- 1) Cupole che coprono la maggior parte dell'edificio, per lo più a pianta centrale
- 2) Cupole impostate assai in alto su di un gioco di sostegni e di archi, a dominare un edificio a pianta complessa

Per quanto riguarda la prima categoria, il monumento che ha fatto da capostipite per notevoli opere è il Pantheon di Adriano. Esso venne ricostruito dalle fondazioni tra il 118 e il 128 d.C. ed è uno dei rari edifici romani che si sia conservato in condizioni tali che ci permettono, non solo di ricostruire gli intenti dell'architetto, ma addirittura di percepirli direttamente.

Un fattore molto importante della realizzazione di quest'opera, che inizialmente fu dedicata a tutti gli Dei, è la gradazione dei materiali del conglomerato secondo il peso e la resistenza a compressione : travertino nelle fondazioni, strati alterni di travertino e di tufo nella parte bassa del tamburo, tufo nella parte superiore e nei

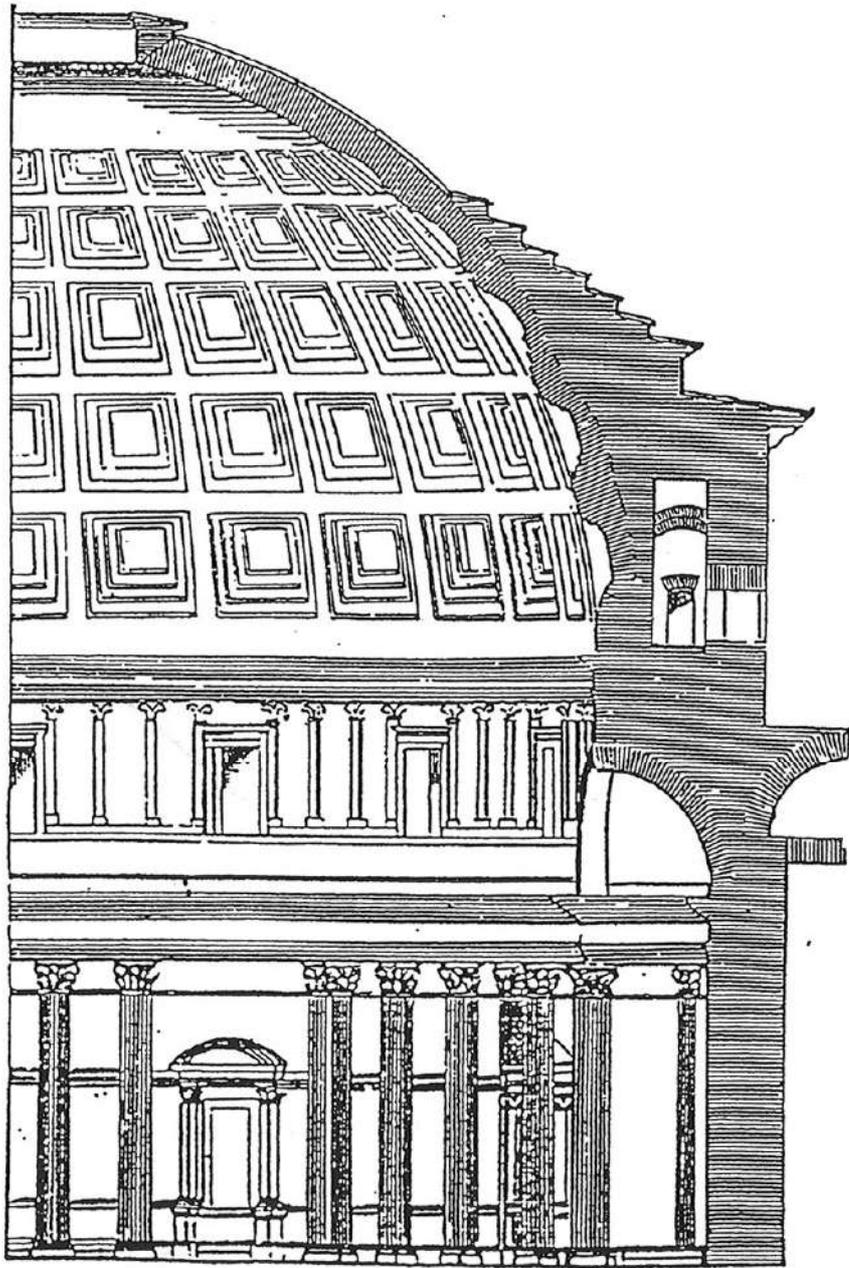
due anelli più bassi, una fascia di laterizio e di tufo in corrispondenza del terzo anello di cassettoni, e al di sopra di esso soltanto tufo giallo e pomice. In chiave il peso per unità di volume è appena due terzi di quello dei basamenti .

La cupola del Pantheon ha la forma di una mezza sfera di 43,5 metri di diametro interno, col centro ad un'altezza dal pavimento pari al suo raggio, in modo tale che una sfera completa viene ad essere iscritta nel tempio.

Il corpo cilindrico sul quale la cupola si eleva è di circa di 6 m. di spessore : in esso sono praticate 8 grandi nicchie con volte triple (ora non più visibili) ed 8 nicchie più piccole intermedie, interne alla muratura, e quindi il sostegno della grandiosa cupola può intendersi piuttosto costituito da un muro esterno massiccio di soli 1,8 metri dal quale si dipartono i 16 sostegni della cupola, 8 sotto forma di pilastri ed 8 sotto forma di volte.

La parte inferiore della cupola è rinfiata da una sopraelevazione del piedritto e da una muratura a gradini, infatti all'esterno essa non appare nella sua effettiva forma. La struttura della cupola è a cassettoni con costole e volte orizzontali in mattoni con riempimento del cosiddetto calcestruzzo. In sommità della copertura vi è una apertura circolare, il *lumen*, di 9 m. di diametro (*fig.1.2.1*)

Le prime grandi cupole realizzate in calcestruzzo dai Romani, tra il I e il II secolo d.C., però, servirono per coprire sale di impianti termali e di monumenti come la



(fig.1.2.1)

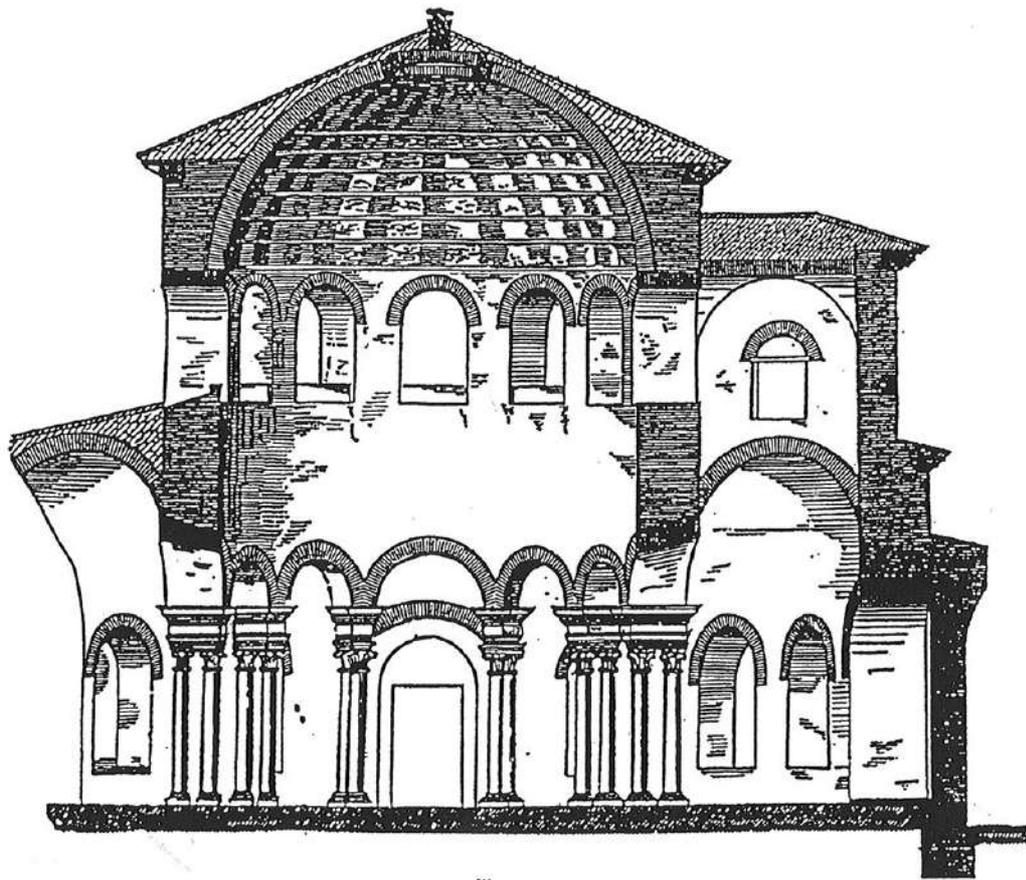
Domus Aurea di Nerone, in cui la sala centrale ottagonale è coperta da una volta ottagonale che si arrotonda in una cupola con un foro rotondo al centro.

Il principio costruttivo di queste prime strutture era quello di creare dei costoloni principali in muratura di mattoni e riempimento di calcestruzzo negli spicchi tra i vari costoloni, i quali appoggiavano su un tamburo alla base e su un anello in sommità.

Continuando nella nostra analisi degli sviluppi di modelli delle cupole ci si deve soffermare su un monumento che rappresenta un notevole passo avanti nella ricerca di evitare delle condizioni di pericolo per questo tipo di copertura; tale monumento è il Mausoleo di Costantina del IV secolo, ora Chiesa di Santa Costanza, dove la disposizione delle strutture che la costituiscono è stata studiata per compensare le varie spinte; infatti l'edificio si imposta su una pianta circolare con lo spazio centrale coperto da una cupola poggiata su un tamburo, sorretto da colonne e circondato da una zona anulare coperta da una volta a botte, la quale bilancia la spinta che la cupola darebbe alle colonne stesse (fig.1.2.2).

La cupola è formata da ventiquattro costole in mattoni, non sporgenti, collegate da strati orizzontali pure in mattoni, con campi intermedi di calcestruzzo.

Lo schema statico fu ulteriormente perfezionato nella chiesa di San Vitale a Ravenna; essa fu incominciata nel 526 e consacrata nel 547 ed è costituita da una costruzione ottagonale centrale sormontata da cupola, attorno alla quale si svolge una costruzione a due piani, pure ottagonale, interrotta al secondo piano in corrispondenza del coro.



(fig.1.2.2).

La cupola emisferica ha un diametro di 19,6 m ed è ricoperta, a differenza delle cupole orientali, da tetto a padiglione ottagonale. Il passaggio dal tamburo ottagonale alla cupola è ottenuto mediante archi racchiudenti delle nicchie costruite in corrispondenza degli angoli, i quali raddoppiano così il numero dei lati del poligono su cui la cupola stesa si imposta. La cupola leggerissima, è formata con vasi disposti uno sull'altro e in doppio strato secondo una spirale tracciata sulla superficie della cupola stessa. Il rinfianco della cupola, fino alla

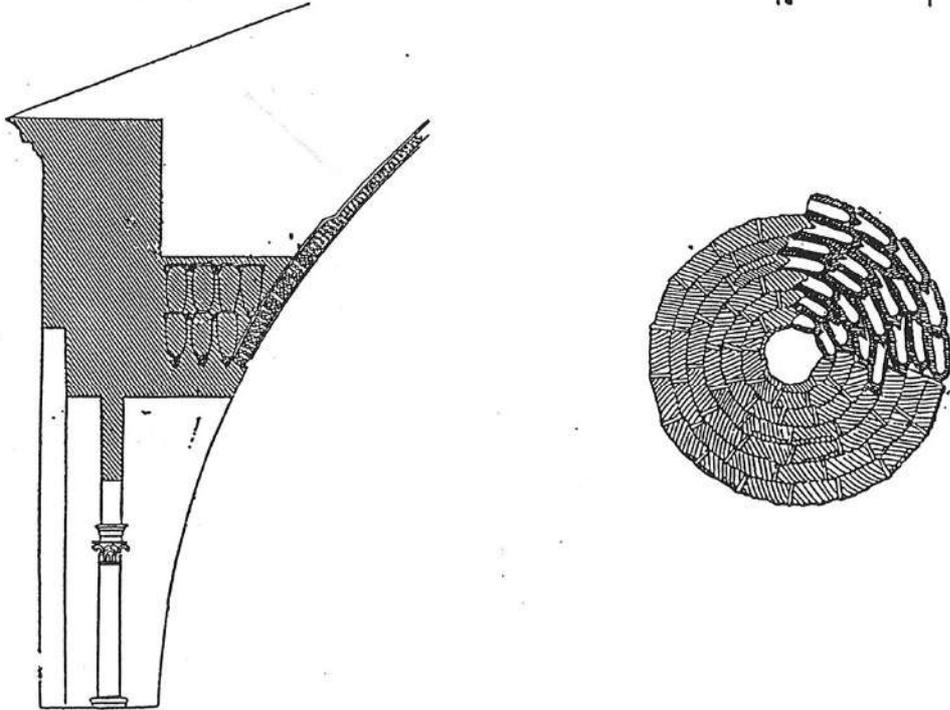
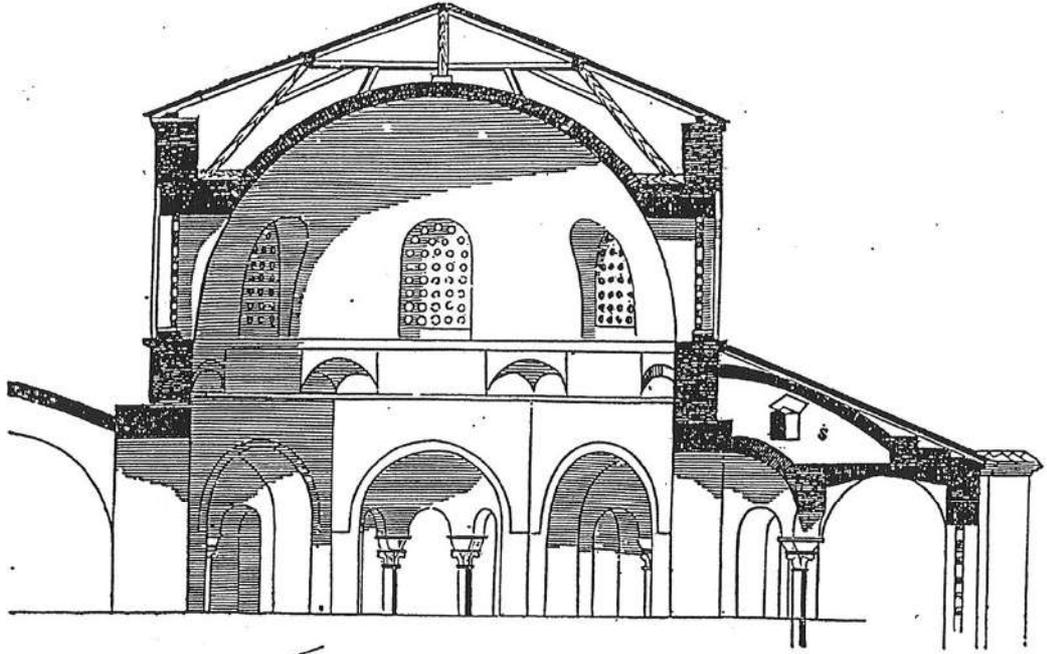
chiave delle finestre è invece costituito con vasi disposti verticalmente (*fig.1.2.3*). L'interno e l'esterno dei vasi sono ricoperti di malta, ciò contribuisce a dare alla costruzione una solidità la quale oggi, dopo 1400 anni, non appare appunto scemata. A rinforzo della cupola servono poi 8 speroni colleganti la base di essa ai pilastri esterni i quali ricevono in tal modo una parte della spinta.

La parte centrale acquista molto in apparenza ed in ampiezza, grazie alle 7 nicchie praticate fino all'altezza del secondo piano fra gli otto piloni della cupola. Notevoli furono gli sviluppi nel secolo VI grazie all'influenza bizantina.

L'organismo a cupola bizantina deriva dallo sviluppo della pianta cruciforme inserita in un quadrato: la cupola emisferica sorge, mediante il raccordo di pennacchi sferici sul nucleo centrale cubico che si rileva esteriormente.

Il primo grande esempio è Santa Sofia di Salonicco della fine del secolo V e la massima applicazione si ha in Santa Sofia di Costantinopoli, capolavoro della architettura bizantina. Questo tempio fu eretto negli anni 532-537 d.C. Su quattro robusti piloni rettangolari posti ai vertici di un quadrato di 31,40 m. di lato, si elevano quattro grandi arcate, alquanto rialzate, formanti due coppie rispettivamente di 29,80 e 22,60 m. di corda e collegate da grandi pennacchi sostenenti la cupola sferica.

La cupola attuale, costruita in luogo della cupola ribassata caduta in seguito a terremoto 22 anni dopo la costruzione, ha un diametro di 32,70 m. ed è elevata di 7,85 m. più dell'antica sicché il vertice di essa è 57,50 m. sopra il pavimento ed il rapporto fra l'altezza della cupola e la sua luce interna è quindi circa 1,75.



(fig.1.2.3)

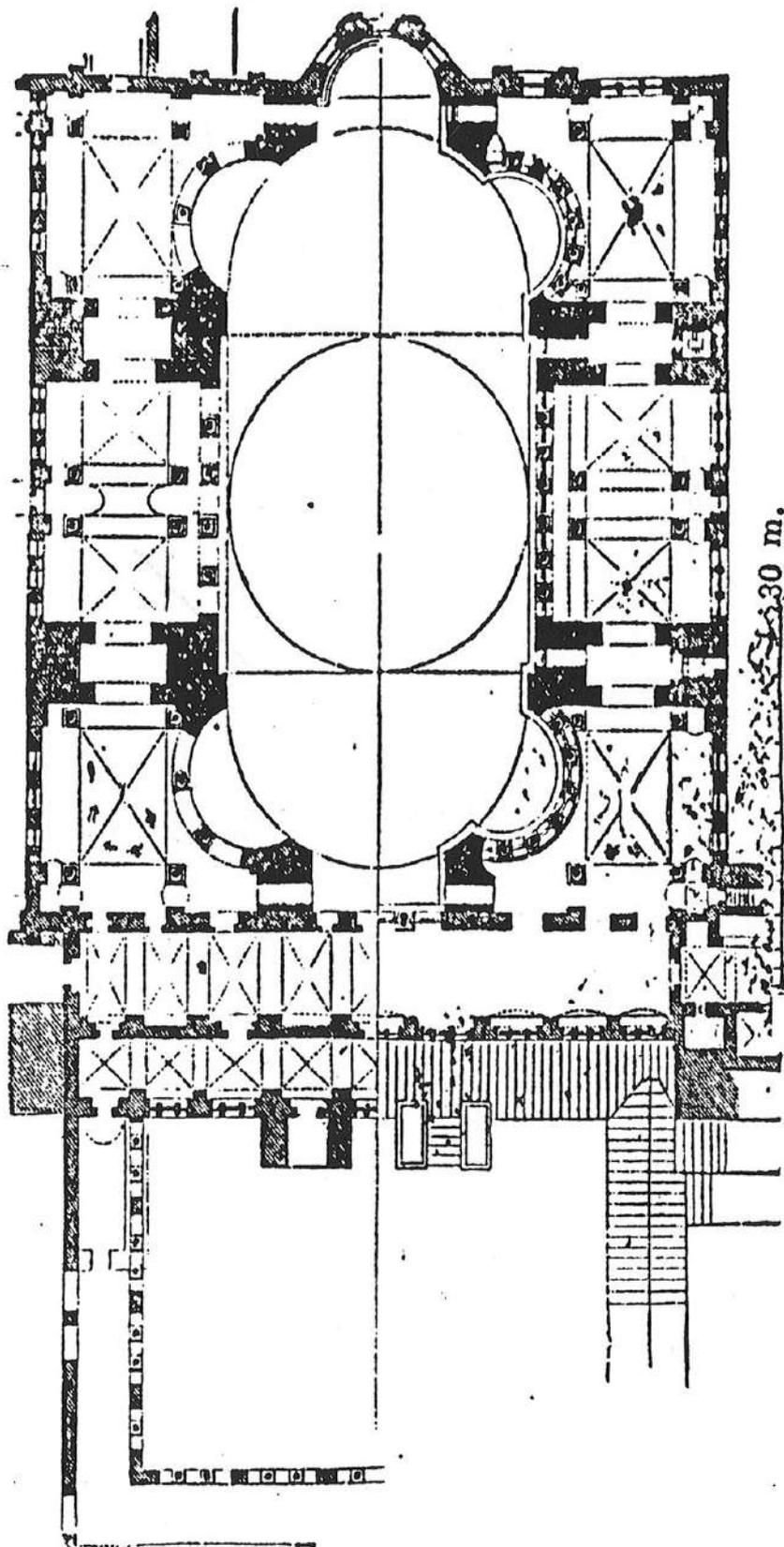
La cupola attuale consta di 40 costole rastremate verso il vertice, e i campi intermedi, di due metri di larghezza alla base, sono collegati da speciali volticelle che si rilevano esternamente nella serie di speroni formanti una cintura fino alle reni : altrettante finestrelle si aprono tra le costole, contribuendo a dare all'interno, per l'interporsi della zona luminosa che esse creano all'imposta, un senso di aereo che crea fascino a questa grande costruzione.

La maggior spinta della cupola ribassata, è contrastata dal rinfiacco che la cinge fino alle reni, ma costituisce tuttavia un notevole problema statico.

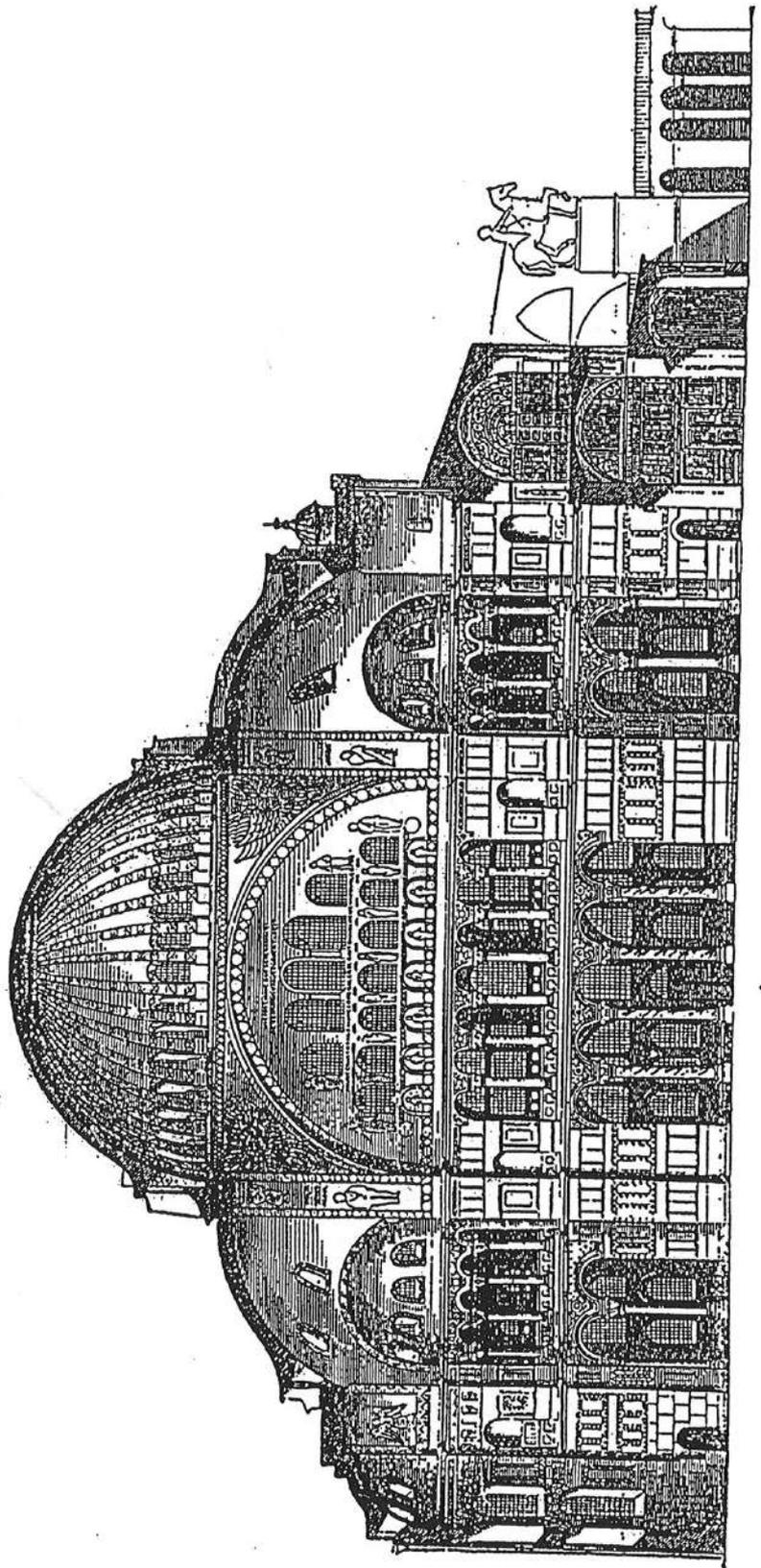
La pianta a croce greca suggerì la soluzione del problema; le grandi absidi che coprono due dei bracci della croce ed i pesanti arconi che chiudono gli altri due bracci sono disposti sia planimetricamente che in elevato nella posizione migliore per raccogliere le spinte delle quaranta nervature che costituiscono la cupola e per convogliarle e diluirle negli otto gruppi principali di strutture verticali portanti (*fig.1.2.4 a,b,c*).

Passiamo ora ad analizzare alcune grandi opere del periodo rinascimentale, dove la cupola diventa elemento fondamentale nell'architettura ecclesiastica e ne caratterizza lo spazio interno con il suo senso di profondità e anche quello esterno spiccando, di solito, su tutti gli altri edifici della città.

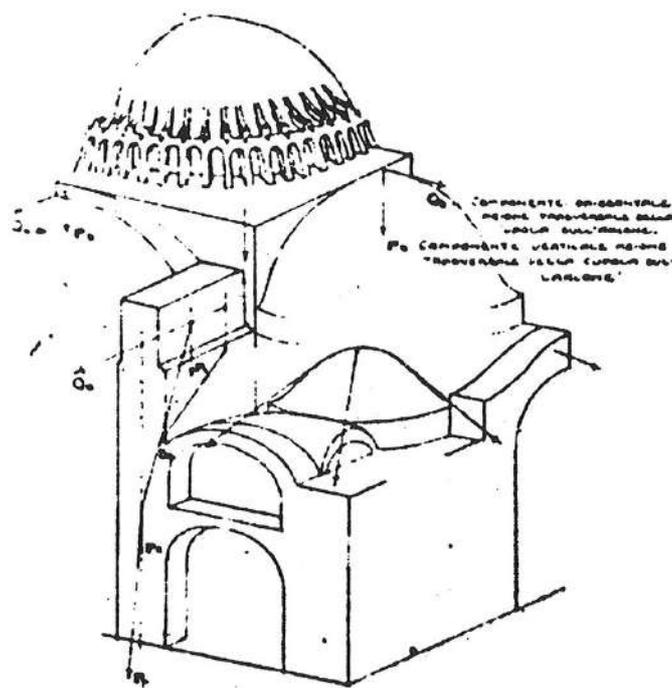
Grandioso è stato il concepimento della cupola doppia della chiesa di Santa Maria del Fiore in Firenze; fu costruita dal Brunelleschi in sedici anni (1421-1436) ed è la prima grande cupola doppia che sia stata eseguita . Essa riposa su di una corona in pietra da taglio : la parte inferiore è massiccia fino ad un'altezza di



(fig.1.2.4 a)



(fig.1.2.4 b)



(fig.1.2.4 c)

3,06m., a partire dal quale punto le due cupole si parano con un interspazio di 1,22 m., che va continuamente crescendo fino a raggiungere 1,60 m. in corrispondenza dell'anello in chiave. La cupola interna misura inferiormente 2,42 m., superiormente 2,10 m. di spessore; quella esterna ha uno spessore costante di 0,58 m.

Le due cupole sono collegate e rinforzate da otto costole principali in corrispondenza dei vertici dell'ottagono e 16 costole intermedie che si impostano superiormente sul forte anello di chiave portante la lanterna. A partire dall'altezza di 10,8 m. dalla base della cupola si hanno nove serie di archi colleganti le costole principali e murati in chiave nella cupola esterna. A 4,70 m.

dalla base vi è un anello di legamento formato di 24 travi di castagno di 35 cm. di altezza e 30 di larghezza collegati da tavole di quercia e ferri piatti di 8 mm. di spessore : questa

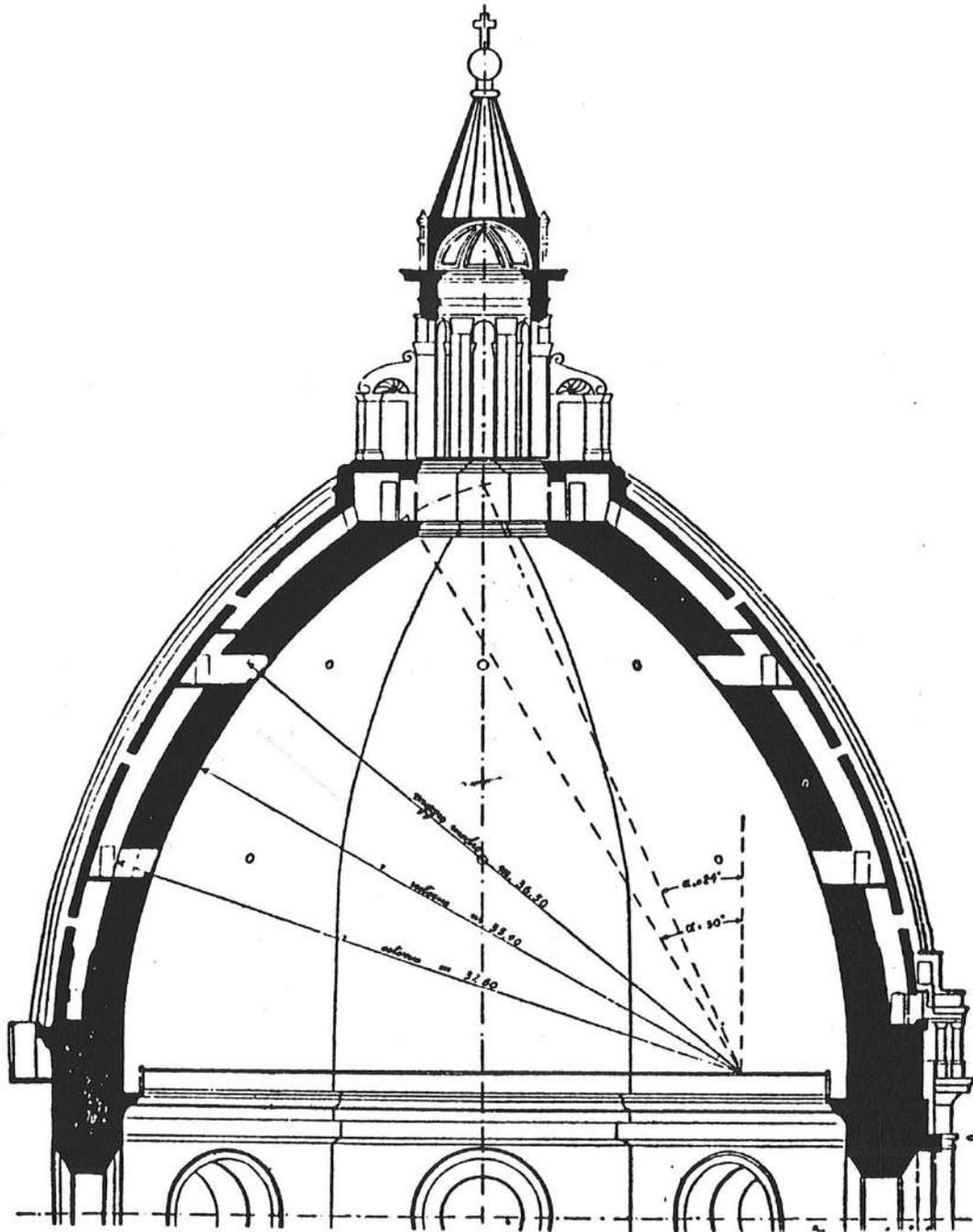
cerchiatura ha evidentemente lo scopo di impedire il rovesciamento degli speroni verso l'esterno.

La parte inferiore della cupola e gli speroni sono in pietra, la parte superiore è in mattoni e pietra per diminuirne il peso. Oltre gli ordinari mattoni rettangolari 25x49x6 cm., vennero adoperati dei mattoni di forma speciale in corrispondenza degli otto angoli interni della cupola.

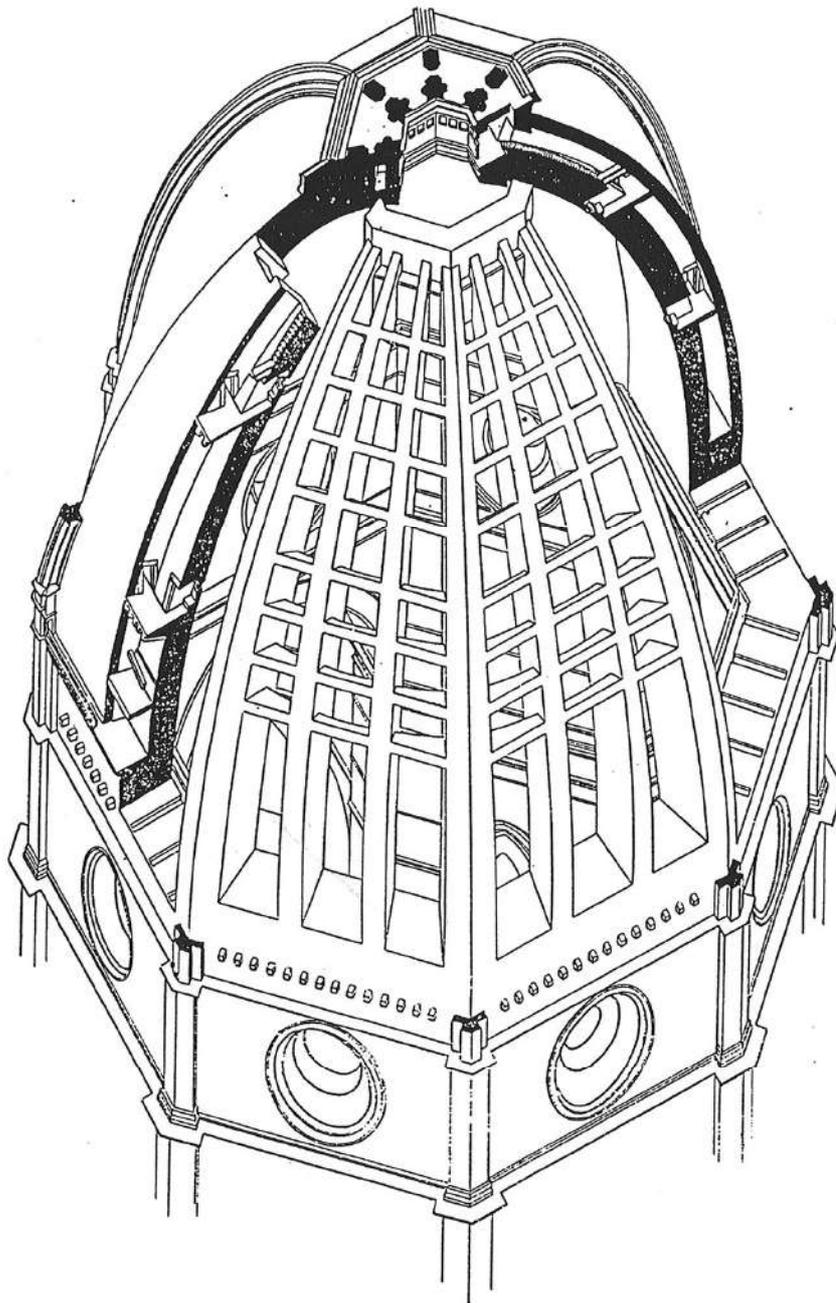
La superficie esterna della cupola venne ricoperta con tegole piane in argilla applicate su di un letto di malta. La cupola venne costruita senza una vera e propria centinatura, ma semplicemente con centine e armature ausiliarie.

Il Duomo di Santa Maria del Fiore offre il primo esempio di cupola grandiosa, elevata su di un alto tamburo, che sia stata lasciata apparire all'esterno nella sua vera forma e che, grazie alla sagoma rialzata e alla ingegnosa costruzione, presenta, con limitato impiego di materiale, tale solidità, da sostenere il rilevante peso della lanterna (*fig.1.2.5 a, b*).

Altra grande opera di quel tempo è la cupola della basilica di San Pietro a Roma, ideata dal Michelangelo; essa presenta un diametro interno di 42,52 m. e riposa su quattro potenti pilastri collegati da grandi archi a cassettoni, che sono raccordati dai pennacchi. Su questi riposa una massa muraria rotonda, in cui è praticato un passaggio a volta. Questa costruzione, fatta in muratura di pietrame con rivestimento di mattoni all'interno e travertino all'esterno, sorregge il



(fig.1.2.5 a)



(fig.1.2.5 b)

tamburo della cupola, dello spessore di 2,85 m. e costituito con gli stessi materiali. Sedici speroni in travertino, servono a rinforzare il tamburo, che architettonicamente si compone di una zona a completa trabeazione corinzia ove tra i pilastri binati si aprono le finestre, e d'un attico superiore. La cupola, che su questo si innalza, è costituita fino ad un quarto della sua altezza da una muratura massiccia, di 2,85 m. di spessore, dalla quale si elevano, in corrispondenza degli speroni del tamburo, 16 costole, rastremate nel senso della larghezza verso il sommo della cupola, mentre lo spessore è tenuto sull'anello di chiave di una metà circa più grande di quello della base. Tra queste costole sono costruite a spinapesce le due calotte con un interspazio di 1 m. alla base e di 3 al vertice.

I progressi che si riscontrano dal lato costruttivo in quest'opera consistono nell'unione fattavi del metodo romano delle costole, metodo che si riscontra applicato anche al tamburo, e del principio della doppia cupola ad arco rialzato del Rinascimento.

L'ingegnere Di Stefano, recentemente, ha studiato a fondo la costruzione e gli interventi che furono necessari nel XVIII secolo, riguardo tale opera, e ha raccolto dei documenti con cui è possibile ricostruire le fasi costruttive.

Secondo tali documenti fu il Della Porta a portare a termine la cupola ideata dal Michelangelo e, secondo il Gioseffi, ne modificò il modello adoperando la stessa calotta michelagiolesca, ma collocandola più in alto per richiesta del pontefice per consentirne la migliore visibilità della struttura dalla città.

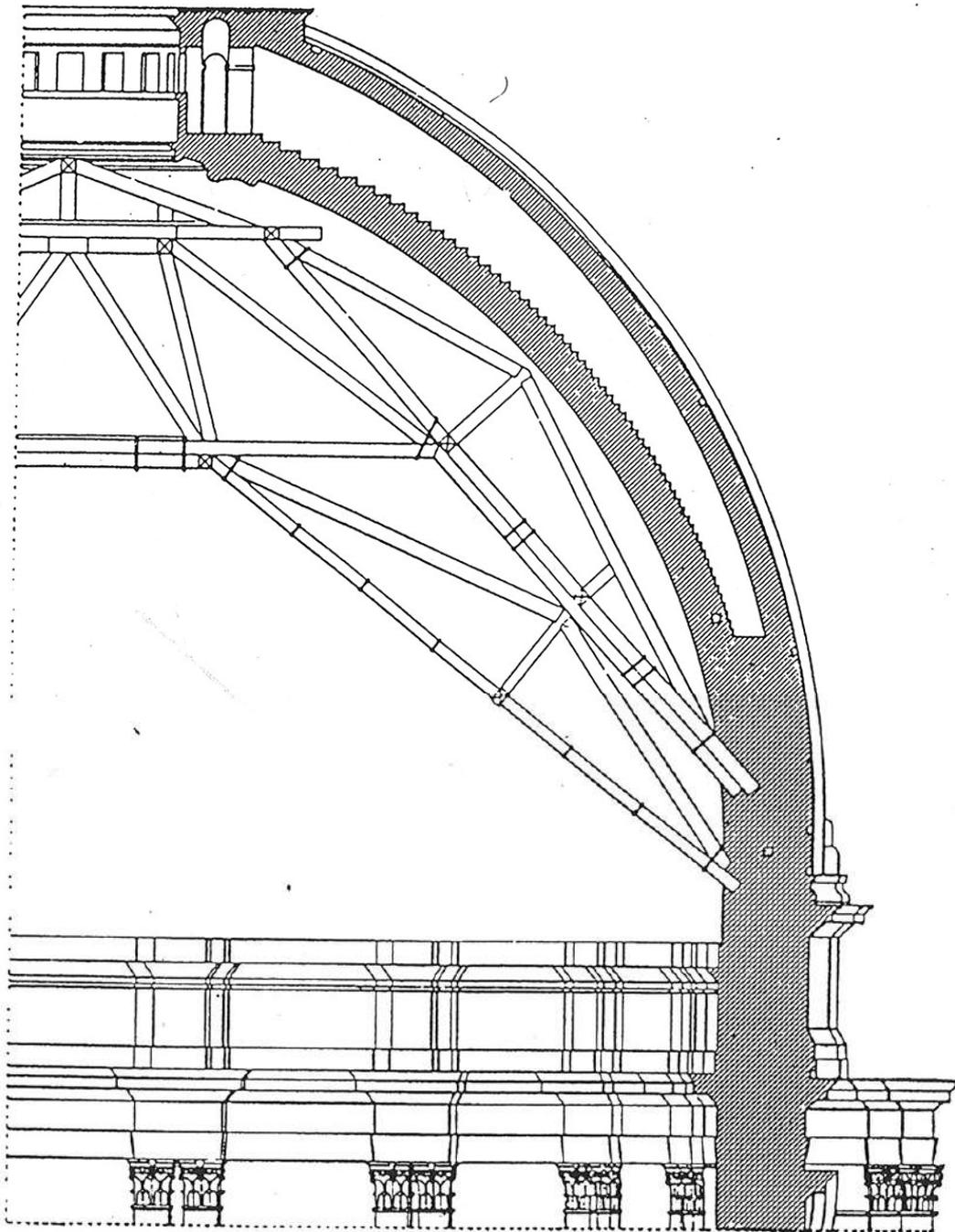
Nel luglio del 1588 viene predisposta, al centro della cupola, l'antenna, cioè l'opera provvisoria, fondamentale per assicurare il sollevamento dei materiali ed il futuro collocamento delle centine occorrenti per costruire la parte curva. Il sollevamento dei materiali, fino alla quota di copertura della navata, già avveniva per mezzo delle scale a lumaca, costruite per tale scopo da Michelangelo nelle strutture inferiori, che garantivano il trasporto a dorso di mulo. Da questa quota in su, i materiali potevano essere ancora trasportati a spalla attraverso il sistema di scale predisposto all'interno del tamburo, al di sopra degli arconi, ed era assicurato costantemente, a mano a mano che la costruzione saliva, grazie all'intercapedine fra le volte ed il gran numero di vani di comunicazione fra l'interno e l'esterno, che Michelangelo si era preoccupato di predisporre.

In seguito vennero predisposte le opportune centinature, dalle squadre dei carpentieri, che poggiava sulla parte più bassa della cupola (*fig.1.2.6*).

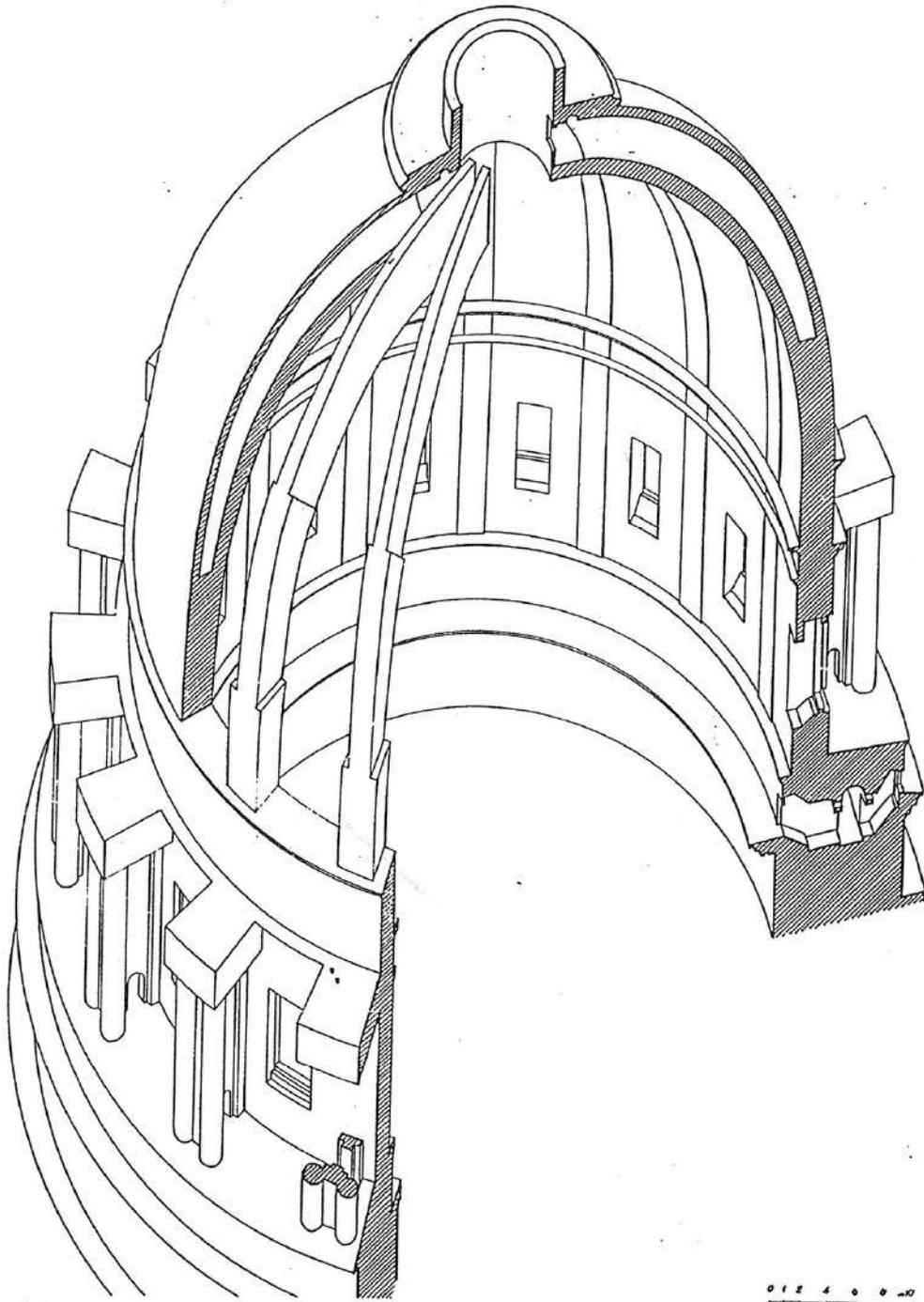
Quindi si inizia la costruzione dei sedici costoloni che vengono realizzati tutti contemporaneamente ad opera di altrettante squadre di scalpellini.

Innalzate le costole per una certa altezza fu possibile procedere alla costruzione della muratura tra i costoloni, e quindi completare la grossa fascia circolare costituente quella grande trave di bordo della struttura che ha il compito di assorbire gli sforzi di trazione (*fig.1.2.7*)

Furono anche realizzate delle catene in ferro a varie altezze e inserite in diversi momenti per cercare di creare un effetto cerchiante sulla struttura.



(fig.1.2.6)



(fig.1.2.7)

Nel XVIII secolo furono realizzati dei restauri alla cupola da parte del Poleni, il quale fece un attento studio dei materiali e delle tecniche costruttive adottate e un accurato rilievo dei dissesti subiti dalla struttura.

Il Poleni analizzò in dettaglio il quadro fessurativo, rilevando delle preoccupanti lesioni verticali nella trave di bordo, specialmente nei tratti di minor resistenza, in corrispondenza delle scale interne, e delle lesioni nei contrafforti, specialmente in corrispondenza dei pennacchi.

Secondo il Poleni le cause di questi dissesti andavano cercate nell'imperfezione dei lavori, nell'assestamento generale della struttura, nel differente comportamento a compressione delle parti in travertino e in murature oppure nell'azione di fenomeni esterni come la pioggia nelle fasi di costruzione, nei fulmini o nei terremoti.

Infine egli decise quali dovessero essere gli interventi di restauro:

- a) inzeppature per le lesioni nei costoloni
- b) chiusura delle fessure
- c) cerchiatura di ferro, con cerchioni incassati nella muratura

1.3 Il Mascheroni e il calcolo della Cupole nel XVIII secolo

Nel XVIII secolo vi è una svolta significativa sulla teoria delle volte e degli archi, che portò poi a migliori risultati nel secolo XIX, e che permise uno studio più approfondito delle problematiche strutturali e costruttive delle volte in genere.

In realtà, dal punto di vista teorico, vi furono impacciati tentativi, spesso addirittura erronei, sull'equilibrio delle costruzioni in pietra.

Gli studiosi di quel tempo ebbero una buona intuizione a considerare i conci di muratura dell'arco come porzioni di cunei incidenti sui giunti tra le pietre; ma, basavano la loro teoria sull'ipotesi di assenza di attrito, non valutando l'azione della malta sui conci.

Solo verso la fine del settecento, Coulomb formulò le cosiddette leggi di attrito, e da ciò andò alla ricerca dell'equilibrio delle strutture in presenza di attrito tra i vari materiali costituenti il complesso murario.

In quel periodo il problema principale era quello di trovare uno spessore adeguato della volta, essendo assegnata la geometria e messa, quest'ultima, in relazione con i carichi; l'altro era quello di determinare lo spessore dei piedritti di sostegno dell'arco, sfruttando un possibile meccanismo di collasso, cioè attraverso un abbozzo di calcolo a rottura della muratura.

Intorno agli anni 30 del secolo XVIII si ha, con il Bouguer, una prima teoria sulle cupole che si basa sull'equazione differenziale di una catenaria 'rovesciata'; infatti, in quegli anni si sviluppò il problema intorno al tema dell'equilibrio funicolare e alla cosiddetta catenaria, posizione assunta da una fune pesante fissata alle sue estremità.

Nel maggio del 1734 il Bouguer presentò all'Accademia delle Scienze la prima memoria che trattava esplicitamente il problema delle cupole, intitolata '*Sur les lignes courbes qui sont propres à former les voûtes en dôme*'.

Egli prese spunto dagli studi sull'equilibrio della fune affrontati da Giacomo Bernoulli che, nel 1704, aveva dimostrato che un arco a forma di catenaria rovesciata resiste al proprio peso, quale sia il suo spessore.

Il Bouguer partì da questo risultato considerando questa proprietà valida anche per una cupola generata per rotazione di una curva opportunamente scelta intorno al proprio asse.

Ipotesi fondamentale della sua teoria era l'assenza di attrito tra i vari conci, dichiarando che se la cupola rimane in equilibrio con questa ipotesi, sicuramente lo sarà anche in presenza di attrito perché ciò migliora la stabilità e la resistenza della volta.

Obiettivo del Bouguer era dimostrare che esistono un'infinità di linee curve appropriate per la realizzazione di una cupola, e anche indicarne un metodo di scelta.

Egli, quindi, partì dall'equazione differenziale di una catenaria :

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{q}{P} \quad (1.3.1)$$

dove y rappresenta l'asse di rotazione della curva, rivolto verso il basso, e l'apice la derivazione rispetto a z , l'asse delle ascisse, poi, q il peso per unità di lunghezza, per le cupole riferito ad uno spicchio, e infine P la forza di compressione agente in sommità A , costante lungo tutta la curva.

Essendo $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dy}{dz}$ e $ds = \sqrt{dz^2 + dy^2}$, si ottiene :

$ds = \sqrt{1+y'^2} dz$ e l'equazione (1.3.1) può scriversi anche :

$$Pdy' = qds$$

da cui, integrando :

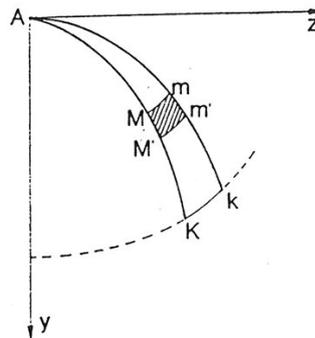
$$Py' = \int_0^z q ds$$

Questa espressione rappresenta il peso Q della porzione di arco compresa tra la sommità A e una sezione generica M di coordinate z, y ; quindi l'espressione dell'equazione della catenaria diventa :

$$P \frac{dy}{dz} = Q$$

Il peso di ogni elemento $Mm M'm'$ dell'unghia infinitesima AKk cresce con z ed è esprimibile in misura proporzionale a zdQ (fig.1.3.1) ; il peso dell'unghia AMm sarà dunque, a sua volta, proporzionale a :

$$\int_0^z zdQ$$



(fig.1.3.1)

Ciò conduce ad assegnare alla curva AM l'equazione :

$$\tau y' = \int_0^z zdQ$$

con τ una nuova costante. Ipotizzando che la cupola sia caricata in modo uniforme sulla sua superficie, ipotesi che si avvera in quasi la totalità dei casi, e

abbia ovunque lo stesso peso unitario, dQ dipenderà dall'elemento lineare ds , in modo tale che la curva muterà la sua equazione nella :

$$\tau y' = \int_0^z z ds$$

dove con τ si indica una nuova costante. Differenziando si ottiene :

$$\tau dy' = z ds = z \sqrt{1 + y'^2} dz$$

da cui :

$$z dz = \frac{\tau dy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Integrando per serie tale equazione il Bouguer riuscì ad ottenere per punti una curva che, per rotazione, dà la superficie della cupola omogenea equilibrata.

Questa superficie garantisce l'equilibrio non solo nel caso in cui la cupola sia tutta chiusa d'intorno con le sue zone circolari intere, ma anche quando essa fosse interrotta o aperta.

L'equilibrio è garantito per tutte le superfici generate da una curva la cui equazione soddisfi la condizione:

$$\tau y' < \int_0^z z dQ$$

Ciò vuol dire che, segnata la curva di equazione :

$$\tau y' = \int_0^z z dQ$$

ogni altra curva, che spiccandosi dallo stesso vertice si slarghi più di quella dall'asse, mantenendosi ovunque meno concava, potrà descrivere con la sua rivoluzione la superficie di una cupola equilibrata.

La difficoltà della risoluzione di tale approccio sta nel conoscere la spinta in chiave e quindi risalire alla costante τ .

Se, invece, integriamo direttamente la (1.3.1), cioè :

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{q}{P} \quad \text{si ottiene :}$$

$$\text{sett } \sinh(y') = -\int \frac{q}{P} dz + C_1$$

e quindi :

$$y(z) = \int \sinh \left[-\int \frac{q}{P} dz + C_1 \right] dz + C_2$$

Per determinare τ , C_1, C_2 si deve tenere conto delle condizioni ai limiti, imponendo il passaggio per due punti generici della curva, ottenendo così le costanti C_1 e C_2 ; mentre per quanto riguarda la terza condizione entra in gioco un'ipotesi sul comportamento del materiale, infatti si considera la curva inestensibile e di lunghezza L :

$$L = \int_{AB} ds$$

Intorno agli anni '70 del secolo XVIII l'abate Bossut, prestigioso matematico francese, presentò all'Accademia di Parigi i suoi studi sulle volte.

Le sue applicazioni riguardavano specialmente il problema della definizione della forma di una struttura voltata capace di garantire l'equilibrio anche in assenza di attrito o di coesione tra i conci e della determinazione dello spessore dei piedritti di sostegno delle volte.

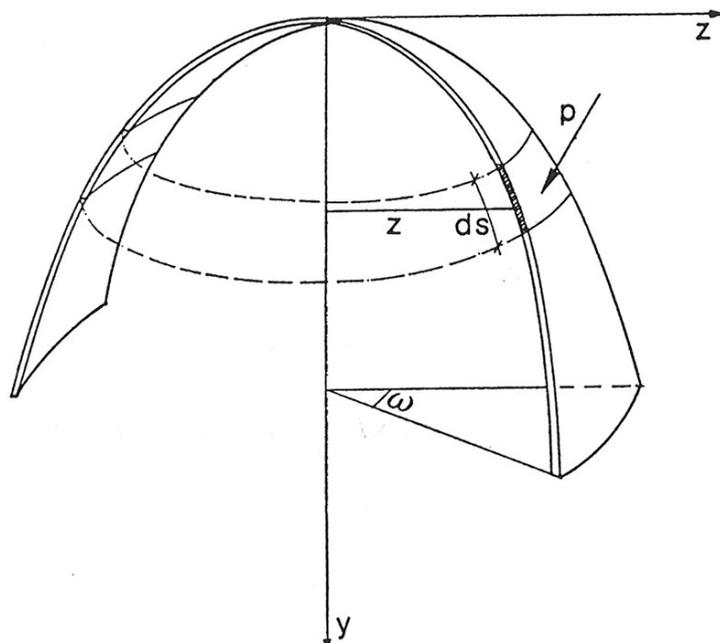
Imponendo delle condizioni di equilibrio nell'arco tra concio e concio, cioè che le forze siano ortogonali al giunto e che le forze a sinistra e a destra si elidono, egli affermava che conoscendo la figura di intradosso, la divisione dell'arco in conci, le direzioni delle forze si potranno conoscere i rapporti tra le medesime, e quindi per esempio nel caso di arco caricato dal solo peso proprio si ottengono gli spessori dei conci, fissando quello del concio in chiave.

Se, poi, si ragiona in termini differenziali si può ottenere lo spessore variabile nell'arco.

Il Bossut, questa teoria la applicò in generale a tutti i tipi di volta, ma a noi interessa come questa si applichi alla struttura della cupola.

Il Bossut ignora l'azione di un'unghia su quella contigua, cioè gli sforzi lungo i paralleli e quindi applica la sua teoria, modificando soltanto l'espressione delle forze esterne, perché in questo caso si esamina uno spicchio di cupola e non un arco.

Se, infatti, si considera una cupola soggetta a una distribuzione di carichi superficiali q uniformi su ogni parallelo, la forza agente su un elemento infinitesimo di lunghezza ds e di larghezza $z\omega$ è data da $qz\omega ds$ (fig.1.3.2) .



(fig.1.3.2)

Tralasciando tutti i passaggi matematici e l'espressione generale dell'equilibrio, si arriva ad un risultato molto vicino a quello dell'espressione dell'equilibrio di una catenaria rovesciata :

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{z}{\tau} dz \quad \text{dove } \tau \text{ è una costante}$$

Anche in Italia, nella seconda metà del 1700, si svilupparono molti studi riguardanti i problemi statici delle volte, con la formazione di veri e propri trattati sull'argomento. Vi sono state, inoltre, accese discussioni su tale tema, e molto noto è il dibattito che insorse sulle cause delle lesioni verificatesi nella cupola di San Pietro in Vaticano e sugli interventi da realizzare.

Tra i vari matematici italiani di quel periodo dobbiamo ricordare, sicuramente, il bergamasco Lorenzo Mascheroni, che diede un notevole contributo alla ricerca dell'equilibrio delle volte attraverso la sua grande opera dal titolo '*Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*', edita nel 1785.

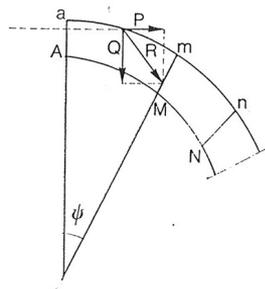
Quest'opera è costituita da 12 capitoli; la prima parte riguarda principalmente l'equilibrio dell'arco e il dimensionamento dei piedritti attraverso alcuni ipotetici meccanismi di rottura dell'arco stesso; la seconda affronta lo studio della forma ottimale delle cupole, in diverse condizioni di carico.

Il Mascheroni era un attento studioso della letteratura scientifica contemporanea; egli, infatti, analizzò i contributi su tale tema del Bouguer, del Bossut , ma a differenza di questi ultimi seppe dare una nuova chiave di lettura sul problema dell'equilibrio delle cupole.

Egli, infatti, approfondì un concetto, che si sviluppò nel settecento per il calcolo delle cupole in muratura : a differenza dell'arco in cui gli sforzi di compressione dovevano essere ortogonali ai letti di malta tra i conci, nell'ipotesi di assenza di attrito, nella cupola è sufficiente che la risultante R tra la spinta orizzontale in chiave P e il peso della parte sovrastante Q, pur obliqua al giunto, cada 'con maggior pendenza', cioè che essa deve tendere verso l'interno della cupola e quindi creare compressione negli anelli (*fig.1.3.3*).

Infatti deve verificarsi :

$$\frac{Q}{P} > \operatorname{tg} \psi \quad (1.3.2)$$



(fig.1.3.3)

Gli autori di quel tempo affermavano, con ragionamenti immaginosi e grossolani, che se la risultante si piega verso l'asse verticale l'unghia AaMm tende a scorrere in giù da m verso M, ma ciò avviene contemporaneamente in tutte le altre unghie e con uguale forza e quindi tali sforzi si impediscono e si elidono l'un l'altro.

Ma la vera novità introdotta sta nella collaborazione degli anelli paralleli con i meridiani; infatti la condizione che la risultante possa essere inclinata, verso l'interno della cupola, rispetto alla normale al giunto corrisponde a dire che vi è compressione negli anelli, ciò conviene se la cupola è costruita in muratura.

Questo risultato lo si può vedere facendo l'equilibrio di un elementino dell'unghia; infatti, essendo la risultante degli sforzi lungo il meridiano rivolta verso l'interno della cupola, la risultante degli sforzi lungo il parallelo dovrà essere rivolta verso l'esterno e ciò si ottiene, grazie alla curvatura dell'elementino, con due sforzi di compressione .

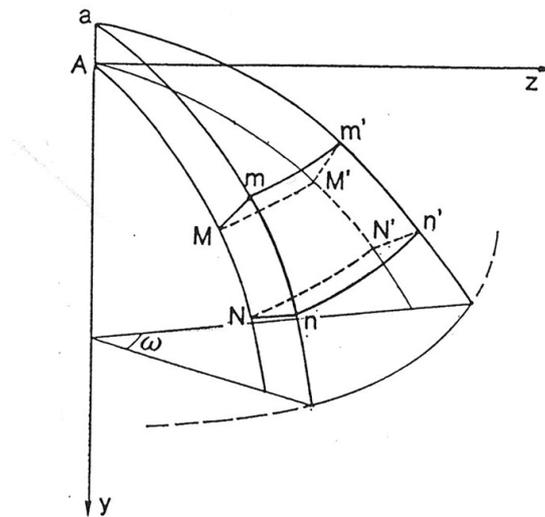
I costruttori del passato non si preoccupavano tanto di valutare le sollecitazioni in entrambi i sensi e di non superare le tensioni di rottura dei materiali, ma piuttosto di comporre in modo opportuno il gioco delle forze esterne e delle sollecitazioni interne, in modo tale da evitare cinematismi di collasso.

Analizziamo, adesso, i risultati di tale teoria che fu, poi, completata posteriormente con i contributi di altri matematici, come il Venturoli.

Innanzitutto si suppone che i letti dei conci siano perpendicolari all'intradosso e che lo spessore h della cupola sia molto piccolo rispetto al raggio di curvatura r .

Quindi il volume dell'elemento Mn' (fig.1.3.4), considerando $\omega=1$, è dato da :

$$Vol.(Mn') \approx hzds$$



(fig.1.3.4)

e dalla (1.3.2) si avrà :

$$\int hzds > \tau \frac{dy}{dz} \quad \text{essendo} \quad tg \psi = \frac{dy}{dz}$$

dove, essendo al primo membro il volume dell'unghia proporzionale al peso Q , sarà la costante τ , al secondo membro, proporzionale alla forza orizzontale P .

Passando ai logaritmi si ha :

$$\log \int hzds > \log \tau \frac{dy}{dz}$$

e differenziando :

$$\frac{hzds}{\int hzds} > \frac{dy'}{y'}$$

Questa disuguaglianza consente di regolare lo spessore della cupola punto per punto, assegnata la curva $y(z)$ generatrice dell'intradosso, in condizione di equilibrio.

Affrontiamo, per primo, il problema della determinazione dello spessore della cupola, essendo assegnata la curva generatrice.

Introduciamo un coefficiente positivo $p > 1$ e quindi sostituiamo la disuguaglianza con un'uguaglianza :

$$\frac{hzds}{\int hzds} = p \frac{dy'}{y'}$$

integrando avremo :

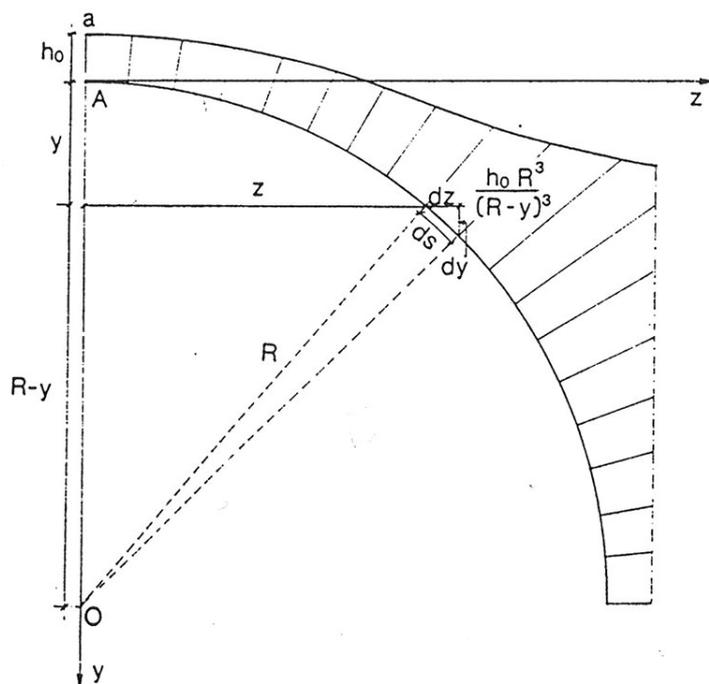
$$\int hzds = \tau(y')^p$$

da cui, per derivazione rispetto ad s :

$$h = \frac{\tau p}{z} (y')^{p-1} \frac{dy'}{ds} \quad (1.3.3)$$

Se si considera, per esempio, una cupola sferica di raggio R , con equazione della circonferenza generatrice $y = \sqrt{2Rz - z^2}$

Si ha inoltre



(fig.1.3.5)

$$\frac{ds}{R} = \frac{dy}{z}$$

e quindi :

$$zds = Rdy$$

dalla figura (1.3.5) inoltre si ottiene :

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z}{R-y} = \frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{R-y}$$

Sostituendo nella (1.3.3) si ottiene :

$$h = \frac{\tau p R (2Ry - y^2)^{\frac{1}{2}p-1}}{(R-y)^{p+1}}$$

Se si impone che per $y=0$ lo spessore h abbia un valore h_0 e ponendo $p=2$ si ottiene il seguente valore di τ :

$$\tau = \frac{1}{2} h_0 R^2$$

e quindi $h(y)$ risulta :

$$h = \frac{h_0 R^3}{(R-y)^3}$$

Se invece, è assegnata una cupola con spessore costante h_0 si parte da :

$$\frac{hzds}{\int hzds} > \frac{dy'}{y'}$$

ed essendo :

$$h = h_0 \quad , \quad zds = Rdy \quad , \quad y' = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{R - y}$$

si ottiene :

$$\frac{dy}{y} > \frac{R^2 dy}{(R - y)(2Ry - y^2)}$$

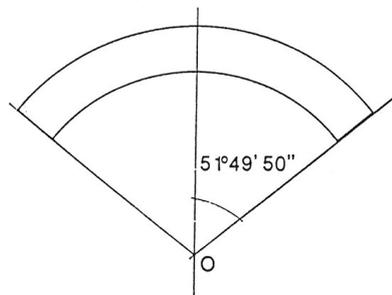
da cui :

$$(R - y)(2R - y) > R^2$$

cioè :

$$y < R \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Ciò significa che la cupola di spessore uniforme presenta nella zona dal vertice ($y=0$) fino all'ordinata $y=0,382R$ sforzi di compressione negli anelli, cioè per angoli minori di $51^\circ 49' 50''$ (fig.1.3.6).



(fig.1.3.6)

Invece al di sotto di tale ordinata si verificano delle sollecitazioni di trazione, nei paralleli, pericolose per le strutture in muratura perché tali sforzi tendono a fessurare la cupola, lungo le direzioni dei meridiani.

Avvenute le lesioni, poi, la struttura cerca una nuova condizione di equilibrio senza però la collaborazione degli anelli paralleli, cioè si comporta come se fosse costituita da tanti archi indipendenti tra di loro; ciò è pericoloso perché non è detto che si trovi una nuova condizione di equilibrio e ciò può significare il crollo della copertura.

Un provvedimento adatto a evitare il crollo della struttura è la cerchiatura metallica della zona dove si hanno sollecitazioni di trazione; essa si contrappone con la sua rigidità estensionale a tali sforzi, cercando di conservare la collaborazione circonferenziale degli anelli.

La teoria del Mascheroni, pur se basata sull'assenza di attrito, si avvicina molto ai risultati che si ottennero, dopo poco più di un secolo, con la teoria membranale.

L'unica critica, quindi, che si può avanzare nei confronti del Mascheroni è l'aver trascurato l'attrito tra la malta e i conci della muratura; infatti se ipotizziamo che la risultante di compressione sul concio sia inclinata di un angolo maggiore dell'angolo di attrito tra malta e concio, il concio dovrebbe scorrere lungo il giunto e quindi creare una condizione di pericolo per la struttura; dobbiamo ricordare, però, che il concio resta in equilibrio grazie anche agli sforzi e ai

vincoli interni lungo le direzioni dei paralleli e quindi tale situazione di pericolo non è così facile da determinare.

Questa teoria del Macheroni mise nelle condizioni l'architetto Valente di realizzare la cupola della chiesa Santa Maria a mare a Maiori conoscendo in modo dettagliato le problematiche strutturali di tali coperture.

L'architetto, sicuramente, scelse il profilo emisferico perché presenta un certo fascino dal punto di vista estetico e una forma che dà armonia a tutta la chiesa.

Quindi, consapevole dei problemi strutturali delle cupole emisferiche, andò alla ricerca di un sistema che potesse contrastare tali sollecitazioni.

Il Valente impostò la cupola su pennacchi, di cui conosceva bene la loro funzione, non solo di appoggio su piante quadrate; i pennacchi, infatti, sono delle strutture che permettono di raccordare una cupola con la struttura sottostante, nei casi che la calotta sia imposta su piante poligonali, specialmente quadrate.

I pennacchi hanno, però, anche una loro funzione statica, cioè contrastare la spinta della calotta; essi, infatti, offrono una buona rigidità estensionale che si contrappone a quella della cupola che tende ad aprirsi all'imposta.

In questo senso tali pennacchi hanno un effetto benefico sulla cupola, perché creano all'imposta delle zone di compressione e sono capaci di ridurre gli sforzi di trazione nei paralleli.

Se, infatti, consideriamo il profilo emisferico sappiamo bene che non vi è spinta sulla struttura di appoggio, ma è presente la trazione nei paralleli dalla sezione al rene fino all'imposta ed in questo caso l'effetto benefico dei pennacchi è la

riduzione delle sollecitazioni di trazione; se , invece, si ha un profilo con tangente non verticale all'imposta, si hanno sicuramente spinte sulle strutture sottostanti, mentre si riduce la zona di trazione, e in questo caso i pennacchi contrastano tali spinte.

Da ciò possiamo trarre la notevole validità statica di tali pennacchi, anche perché, oggi, sappiamo bene che per coperture in muratura vi sono infinite curve di pressione, comprese nello spessore, che possono verificare l'equilibrio di tali strutture e quindi infiniti possibili profili, da quello emisferico a quello parabolico.

1.4 Metodi attuali di calcolo: la teoria membranale e il metodo degli elementi finiti

1.4.1 La teoria membranale

La teoria membranale, proposta dal Pùcher intorno al 1930 per le volte sottili, considera la struttura resistente in modo bidimensionale, con sforzi contenuti nel piano tangente alla superficie e regime flessionale trascurabile.

Nelle volte sottili, infatti, le tensioni si possono ritenere costanti lungo lo spessore, in quanto le deformazioni che esse producono modificano la curvatura della superficie media, ma, essendo lo spessore piccolissimo e quindi quasi nulla la loro rigidezza flessionale, i momenti flettenti e le tensioni di flessione risultano del tutto trascurabili.

In effetti, questo regime di sollecitazioni secondario assume un peso rilevante solo nella zona di superficie a contatto con le strutture di bordo e per questo si parla di effetti di bordo.

Nella teoria membranale, infatti, la volta è considerata come se fosse libera di deformarsi nella maniera più opportuna senza preoccuparsi che sul contorno ci sono dei vincoli cinematici ; nasce quindi un problema di congruenza di deformazione che genera il regime secondario di flessione e taglio che tende a ripristinare la congruenza tra le due strutture. Tali effetti si smorzano abbastanza rapidamente per la notevole rigidità estensionale degli anelli lungo i paralleli, nel caso delle cupole.

Le ipotesi che sono alla base di tale teoria sono le seguenti :

- a) Gli elementi lineari normali alla superficie media della volta, nella configurazione indeformata, si conservano, a deformazione avvenuta, della stessa lunghezza e normali alla superficie media deformata.
- b) Le tensioni normali alle giaciture parallele alla superficie media sono trascurabili rispetto alle tensioni agenti sulle sezioni normali alla volta.

Quindi, lo stato di deformazione è caratterizzato completamente dalle deformazioni della superficie media e analogamente lo stato tensionale viene determinato in ogni punto quando sono note le risultanti delle tensioni agenti su una sezione normale della volta, cioè quando sono note le caratteristiche della sollecitazione.

Le volte in cemento armato sottile vengono studiate, nella progettazione statica, con tale teoria, in quanto il loro comportamento è paragonabile a quello di una membrana.

Con queste coperture si possono coprire luci dell'ordine dei 30 metri con spessori di calcestruzzo, armato lungo la fibra media, di circa 10 cm e si potrebbero adottare spessori ancora minori se non vi fossero due ostacoli : uno è tecnologico, perché non si potrebbe più definire omogeneo un materiale che ha lo spessore comparabile con le dimensioni degli inerti, e perché comunque bisogna rispettare degli spessori di copriferro minimo; l'altro ostacolo, che è molto insidioso, è quello dell'instabilità per la quale non esistono modelli di calcolo molto affidabili.

Le volte in muratura, invece, non presentano spessori tali da rispettare le ipotesi della teoria membranale; se, però, la membrana la si pensa come una possibile superficie delle pressioni, contenuta nello spessore della volta, tale teoria può essere utilizzata per la determinazione di un possibile equilibrio.

Di possibili superfici di pressione che verificano l'equilibrio della struttura ne esistono infinite, ma solo quella media presenta tensioni e deformazioni costanti in una sezione; invece le altre superfici inducono delle sollecitazioni di flessione che portano, in alcune situazioni, alla parzializzazione della sezione.

In conclusione, nelle cupole in muratura non sappiamo definire in modo rigoroso quale sia la superficie delle pressioni secondo la quale la struttura si mantiene in equilibrio, ma possiamo definire delle situazioni che comportano dei problemi strutturali differenti. Infatti, se noi analizziamo una cupola emisferica, possiamo

notare che utilizzando la superficie media, avremo degli sforzi di trazione nei paralleli dall'imposta fino alla sezione al rene ; mentre possiamo trovare una superficie parabolica, sempre contenuta all'interno dello spessore, che mi elimini le sollecitazioni di trazione nei paralleli, ma mi dia spinte sulle strutture di appoggio della struttura, problemi di schiacciamento della muratura per le elevate tensioni in alcuni punti e la parzializzazione della sezione.

Fatta questa premessa ci accingiamo ad affrontare lo studio della teoria membranale trascurando gli effetti flessionali sulla struttura.

Per le volte di rivoluzione le linee di curvatura principali sono costituite dai meridiani e dai paralleli, i raggi principali di curvatura sono dati dal raggio di

curvatura R_1 del meridiano e da $R_2 = \frac{r}{\sin \vartheta}$ dove r è il raggio del parallelo, nel

piano orizzontale, passante per il punto in esame .

Analizziamo il caso di distribuzione di carico uniforme sulla cupola. Essendo le forze agenti simmetriche rispetto all'asse di rivoluzione, anche gli effetti prodotti da tali forze risulteranno simmetrici.

La geometria della cupola si definisce, in qualunque suo punto generico P, in funzione di R_1 , raggio di curvatura del meridiano, di ψ , angolo di rotazione del raggio r del parallelo, nel piano orizzontale, e di θ , la latitudine, angolo tra l'asse verticale di simmetria e la normale alla superficie nel punto considerato.

Essendo la cupola caricata in maniera assialsimmetrica le equazioni di equilibrio per ottenere gli sforzi N_1 e N_2 , lungo i meridiani e i paralleli (*fig. 1.4.1*), in un elemento di cupola, si riducono alle condizioni di equilibrio globale alla

traslazione verticale, di tutta la parte di cupola superiore ad un parallelo, e di equilibrio locale lungo la normale alla superficie.

Analizziamo prima l'equazione di equilibrio globale verticale :

$$2\pi r N_1 \sin \vartheta + Q = 0$$

da cui :

$$N_1 = \frac{Q}{2\pi r \sin \vartheta}$$

avendo indicato con Q la risultante verticale dei carichi che agiscono sulla parte di cupola sovrastante il parallelo considerato.

Invece, l'equilibrio locale lungo la normale alla superficie si ottiene proiettando tutte le forze agenti sull'elemento considerato nella direzione della normale.

Lo sforzo N_1 dà il contributo $-N_1 r d\psi d\vartheta$.

$$\text{Infatti } -2N_1(r d\psi) \sin \frac{d\vartheta}{2} \approx -N_1 r d\psi d\vartheta \quad \text{con } dN_1 \approx 0$$

Gli sforzi N_2 , lungo il parallelo, danno il contributo $-N_2 R_1 \sin d\vartheta d\psi$.

Infatti la risultante degli sforzi N_2 , agenti sull'elemento, è diretta secondo il raggio del parallelo e vale :

$$2N_2(R_1 d\vartheta) \sin \frac{d\psi}{2}$$

e proiettando tale forza lungo la normale z si ha infine il contributo di N_2 :

$$-2N_2(R_1 d\vartheta) \sin \frac{d\psi}{2} \sin \vartheta \approx -N_2 R_1 \sin \vartheta d\vartheta d\psi$$

da questa si ottiene la seconda condizione di equilibrio :

$$-N_1 r - N_2 R_1 \sin \vartheta + Z R_1 r = 0$$

dove Z è il carico locale lungo la normale alla superficie.

Quindi, in regime di membrana, le equazioni di equilibrio sono le seguenti :

$$N_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \vartheta}$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$

Il problema è, quindi, staticamente determinato e risulta immediato, tramite queste equazioni, risalire dai carichi esterni agli sforzi N_1 e N_2 .

Se applichiamo tali equazioni ad una cupola sferica soggetta al solo peso proprio si ottiene che gli sforzi nei paralleli al di sotto della latitudine $\vartheta_0 = 51^\circ 50'$ sono di trazione.

Infatti, tagliata la cupola con un piano orizzontale generico, se f è la freccia della parte sovrastante, l'area di questa è $A = 2\pi R f$ e il peso è $Q = 2\pi R f s \gamma_m$, con γ_m peso per unità di volume del materiale costituente la cupola.

$$\text{Quindi } N_1 = \frac{2\pi R f s \gamma_m}{2\pi r \sin \vartheta}$$

Ed essendo : $r = R \sin \vartheta$, $f = R(1 - \cos \vartheta)$ si ottiene :

$$N_1 = -\gamma_m R s \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} = -\frac{\gamma_m R s}{1 + \cos \vartheta}$$

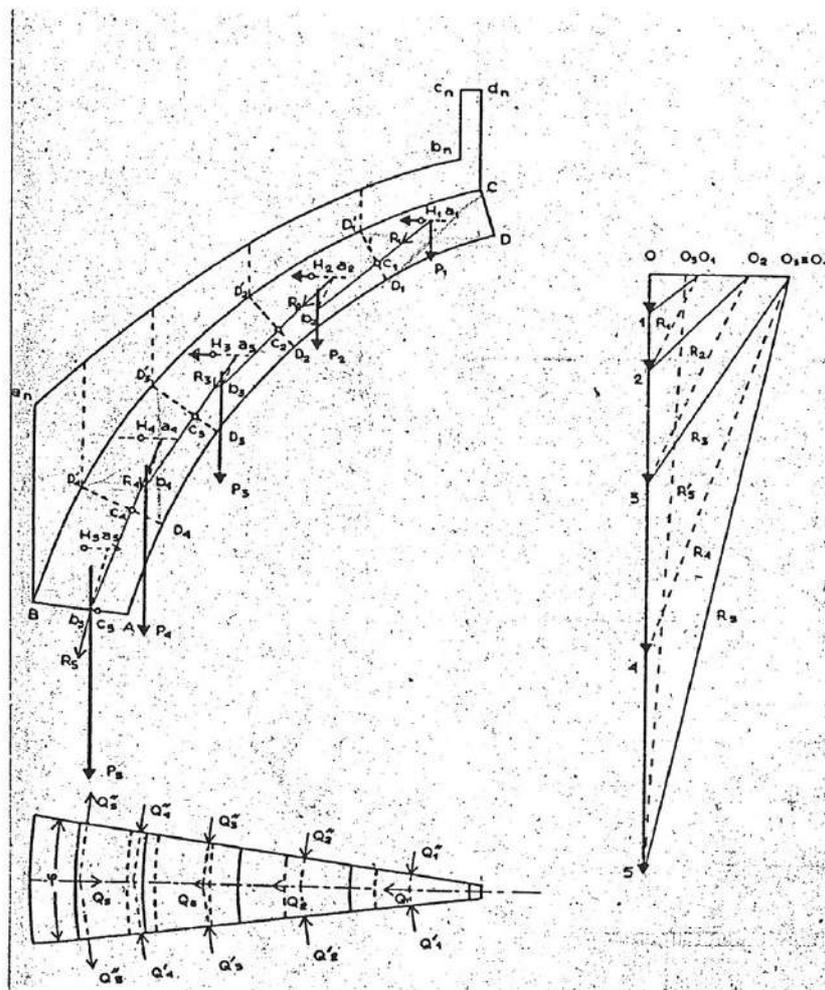
Il peso della cupola per unità di area vale $\gamma_m s$ e la componente di tale peso normale alla cupola è $Z = -\gamma_m s \cos \vartheta$

Quindi :

$$N_2 = R\left(Z - \frac{N_1}{R}\right) = \gamma_m R s \frac{1 - \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta}{1 + \cos \vartheta}$$

Da questa formula si ottiene quello che abbiamo affermato, cioè che nei paralleli con latitudine maggiore di 51° .

Altra teoria utilizzata oggi per la verifica di stabilità di una cupola, che, però, porta a dei risultati molto simili a quelli della teoria membranale, è il metodo grafico con poligono funicolare (fig 1.4.2.).



(fig 1.4.2.)

Infatti, nel caso di una cupola simmetrica e caricata simmetricamente si limita la verifica ad uno spicchio elementare compreso tra due meridiani formanti un piccolo angolo φ .

Inizialmente si esegue il disegno della proiezione orizzontale dello spicchio elementare e della sua sezione verticale media e si traccia la linea $a_n b_n c_n d_n$ di carico; poi, si divide la sezione verticale dello spicchio in n conci ideali e si innalzano le verticali per i punti di divisione all'estradosso, determinando le porzioni di sovraccarico che competono a ciascun concio.

Fatto questo, si calcolano i carichi P_i complessivi sollecitanti i singoli conci e si tracciano le loro rette di applicazione; si traccia, quindi, il poligono $0,1,\dots,i,\dots,n$ delle forze P_i ; si determinano i punti H_i estremi superiori dei noccioli delle sezioni baricentriche dei conci ed i punti c_i , estremi inferiori dei terzi medi dei letti $D_i D'_i$.

Dal punto H_1 si traccia l'orizzontale fino ad incontrare in a_1 la retta di applicazione del peso P_1 ; si congiunge a_1 con c_1 e si determina l'intersezione b_2 della retta a_1c_1 con la retta di applicazione del carico P_2 ; dal punto 1 del poligono delle forze si traccia la parallela alla retta a_1c_1 , ottenendo in $1-0_1-0$ il poligono di equilibrio del primo concio; il lato 0_1-1 rappresenta l'azione che il primo concio trasmette al concio sottostante.

In seguito, si compone la 0_1-1 con il peso $P_2=1-2$; per il punto b_2 si traccia la parallela alla 0_1-2 fino ad incontrare in a_2 l'orizzontale per il punto H_2 .

Si congiunge, allora, a_2 con c_2 e si determina l'intersezione b_3 della congiungente a_2 e c_2 con la retta di applicazione del peso P_3 ; dal punto 2 del

poligono delle forze si traccia la parallela $2-0_2$ alla retta a_2c_2 ottenendo in $0_2-0_1-1-2-0_2$ il poligono di equilibrio del secondo concio : il lato 0_2-2 rappresenta l'azione R_2 che il secondo concio trasmette al terzo.

La costruzione grafica accennata viene applicata ai conci successivi, ma, arrivati ad un certo concio m , la spinta Q si annulla per poi cambiare di segno : negli anelli più bassi, tra i conci di spicchi consecutivi, si sviluppano sforzi di trazione.

1.4. *Il metodo degli elementi finiti*

Analizziamo, ora , un'altra teoria moderna che consente lo studio della statica di una cupola : il metodo degli elementi finiti.

Tale metodo risolve il problema dell'equilibrio di un corpo continuo, soggetto ad azioni esterne, retto da equazioni differenziali alle derivate parziali.

Alla base di tale metodo sta la suddivisione della struttura in un certo numero di porzioni, dette appunto *elementi finiti*, e si stabilisce il modello di spostamento individualmente per ognuno di essi. Su questa base viene definito il comportamento di ogni singolo elemento e quello dell'intera struttura viene poi ricostruito assemblando gli elementi di cui è composta, che si immaginano connessi tra di loro e con il supporto esterno solo in determinati punti, detti *nodi*.

E' quindi sufficiente determinare le proprietà di alcuni elementi fondamentali (rettangoli, triangoli) che si ripetono più volte nella struttura e possono essere utilizzati anche con riferimento a strutture diverse per forma e condizioni di vincolo e carico.

Il calcolo delle proprietà degli elementi, e il loro assemblaggio richiedono operazioni di natura ripetitiva, affidabili quasi per intero a programmi di calcolo.

Tale teoria fu suggerita da alcuni sistemi strutturali, quali travature reticolari o telai, che si presentano direttamente come assemblaggi di un numero finito di elementi.

L'idea di sostituire l'assemblaggio fisico con una suddivisione astratta del mezzo continuo sembra essere stata avanzata per la prima volta da Edward Study nel 1903 e successivamente riproposta da altri autori in epoche in cui mezzi di calcolo automatico non erano ancora disponibili alla pratica ingegneristica. Essa suscitò limitato interesse a causa del notevole onere computazionale che la sua applicazione comportava.

In effetti, al metodo degli elementi finiti viene convenzionalmente attribuita una data di nascita approssimata : il 1956, anno di pubblicazione di un lavoro di Turner, Clough, Martin e Topp . L'importanza di tale lavoro non può essere compresa se non in relazione a un evento accaduto solo due anni prima, quando è stato reso disponibile il primo linguaggio simbolico, battezzato con il nome di FORTRAN (FORmula TRANslation language). Ciò ha segnato una svolta nell'utilizzo pratico dei mezzi di calcolo.

Tale teoria sfrutta il metodo delle deformazioni, in quanto si assumono come incognite parametri di spostamento in alcuni punti del corpo. Il modello di spostamento viene definito in funzione di queste variabili discrete; noti i parametri di spostamento, mediante le relazioni di congruenza, si valutano le deformazioni e da queste gli sforzi in base alle leggi costitutive del materiale.

Nel metodo degli spostamento la matrice di rigidità della struttura viene costruita sovrapponendo per ogni nodo il contributo delle matrici di rigidità dei

singoli elementi. In modo analogo, vale a dire sovrapponendo i vettori delle forze degli elementi, si genera il vettore dei carichi. Infine si impongono le condizioni al contorno negli spostamenti. Queste operazioni danno luogo ad un sistema di equazioni algebriche nei parametri di spostamento incogniti.

Le varie fasi del metodo sono le seguenti :

- a) Discretizzazione del continuo, cioè suddivisione in elementi finiti della struttura
- b) Determinazione delle matrici di rigidezza degli elementi e dei vettori delle forze nodali
- c) Assemblaggio delle matrici di rigidezza degli elementi e dei vettori delle forze nodali per l'intero sistema di elementi e nodi (equazioni del sistema)
- d) Introduzione delle condizioni al contorno
- e) Soluzione delle equazioni del sistema risultante
- f) Calcolo delle deformazioni e degli sforzi in base agli spostamenti nodali

Inizialmente, dopo la suddivisione del continuo in elementi, si definiscono i parametri di spostamento nodali. Il loro numero e la loro scelta dipende dal problema. Per un problema piano negli sforzi si assumono le due componenti di spostamento nel piano. Nel caso di una piastra inflessa si può operare con lo spostamento trasversale e le due rotazioni della normale alla superficie media.

Per l'analisi tridimensionale si assumono come parametri nodali di spostamento le tre componenti di spostamento u , v e w . Si definisce con u_i il vettore degli

spostamenti del nodo i . Gli elementi di u_i sono i parametri di spostamento nodali del nodo i , elencati in un certo ordine.

Per esempio nel caso tridimensionale :

$$u_i = \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right\}_{nodo i}$$

Il vettore contenente i sottovettori degli spostamenti nodali di un elemento è detto *vettore degli spostamenti nodali dell'elemento* ed è indicato con U^n :

$$U^n = \left\{ \begin{array}{l} u_{n1} \\ u_{n2} \\ - \\ u_{ns} \end{array} \right\}$$

Introduciamo ora le espressioni degli spostamenti definiti nel dominio dell'elemento in funzione di un insieme di parametri

$$u = \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = A\alpha$$

in cui A contiene funzioni assegnate (di x, y, z) e α sono parametri detti 'coordinate generalizzate'. Ne consegue :

$$U^n = C\alpha$$

Nel caso in cui C è una matrice quadrata e non singolare si ottiene :

$$u = \Phi U^n = A(C)^{-1}U^n$$

Nel metodo degli elementi finiti si assumono come spostamenti generalizzati gli spostamenti nodali, il modello di spostamento è limitato unicamente al dominio dell'elemento e non è quindi esteso all'intero dominio del corpo.

Introducendo gli sviluppi delle funzioni spostamento nel Principio dei Lavori Virtuali si ottiene un insieme di equazioni algebriche che pongono in relazione gli spostamenti nodali e le forze nodali generalizzate.

Il principio dei lavori virtuali viene scritto :

$$\iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \dots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV = \iiint (X \delta u + \dots + Z \delta w) dV + \iint_S (p_x \delta u + \dots + p_z \delta w) dS$$

Il principio, essendo una condizione di equilibrio, è indipendente dal comportamento del materiale, sia esso elastico o non elastico. Limitando la trattazione a materiali elastico lineari si possono esprimere le relazioni sforzi-deformazioni :

$$\sigma = D\varepsilon$$

In generale D è una matrice simmetrica e positiva per un materiale reale.

Applicando le relazioni deformazioni-spostamenti si ha :

$$\varepsilon = BU^n$$

in cui B contiene assegnate funzioni delle coordinate. Gli sforzi sono determinati da :

$$\sigma = D\varepsilon = DBU^n$$

e quindi :

$$\iiint D\varepsilon \delta \varepsilon dV = KU^n \delta U^n$$

dove K è detta matrice di rigidezza dell'elemento; nella forma discretizzata :

$$\sum_{ne} KU^n \delta U^n = \sum_{ne} P \delta U^n$$

Quindi, avendo introdotto le condizioni di vincolo nei punti nodali, si determinano le deformazioni dell'elemento operando sugli spostamenti nodali; le sollecitazioni interne, poi, sono ottenute applicando le relazioni sforzi-deformazioni.

Capitolo II

La Chiesa di Santa Maria a mare in Maiori

2. Generalità

Maiori, ridente cittadina incastonata come perla nella Costiera Amalfitana, di circa 7000 abitanti, è ricca, oltre che di patrie glorie, di una profonda tradizione culturale religiosa; infatti, la devozione alla Madonna risale all'anno 1204, quando la Statua della Vergine, avvolta in una balla di cotone, gettata in mare durante una tempesta da un bastimento proveniente da Costantinopoli, fu raccolta dalle reti di pescatori e trasportata solennemente in processione nella Chiesa, già dedicata a San Michele Arcangelo, che, da allora, fu chiamata Santa Maria a Mare.

La Statua lignea della Vergine con Bambino, di pregevole fattura, è una scultura policroma in cedro del Libano del XVI secolo, probabilmente copia dell'originale rinvenuta in mare e, probabilmente, trafugata nel saccheggio dai

Pisani nel 1269; è stata incoronata con corona d'oro il 15 agosto 1769 dal papa Clemente XIV.

La città di Maiori, Comune della provincia di Salerno, è ubicata sul livello del mare sulla fascia della Costiera Amalfitana ed è compresa in quell'ampia svasatura con cui termina verso il mare il vallo di Tramonti, che prende inizio dal valico di Chiusi, famoso per l'immenso panorama, tra i più belli del mondo, che offre al viaggiatore in cerca di natura, con le sue attrazioni e le sue ineguagliabili bellezze.

La città a valle è racchiusa in un ampio arco a delimitare il quale vi sono due ripiani collinosi, a oriente quello del Brusario e ad occidente quello del Fronzuti o Torina, i quali, con i folti nuclei abitati di case dalla caratteristica struttura arabo-mediterranea, Lazzaro e Lama ad oriente, Campo e Paie ad occidente, testimoniano la presenza della città vecchia, storicamente e panoramicamente di gran pregio e riguardo.

A Nord si eleva maestoso l'antichissimo Castello Medioevale, a Sud l'ampia spiaggia delimitata dal litorale marino lungo circa un Km che si estende per tutto il tratto compreso tra la Torre detta Normanna ad Est e l'altra detta Torricella o Torre Mezzacapo ad Ovest, ai limiti del confine con il Comune di Minori.

Il territorio per tutto il tratto costiero è attraversato dalla strada nazionale che da Vietri sul Mare, toccando per prima Cetara, porta a Maiori e, snodandosi poi per Minori, Atrani, Amalfi, Conca dei Marini, arriva a Praiano e Positano e, subito dopo Amalfi deviando per Agerola, fino a Castellammare di Stabia.

Tale strada, tagliata nella viva roccia, fu aperta per il tratto Amalfi-Maiori nel 1851 da Ferdinando II di Borbone e per l'intero tratto Amalfi-Salerno il 12/1/1854.

Maiori è, secondo quasi tutti gli autori che ne fanno menzione, ritenuta città sicuramente antichissima, risalente all'epoca degli Etruschi, proprio per quel suo nome originario di Reghinna di cui la desinenza "inna" denuncia al matrice chiaramente di derivazione da quella civiltà.

Maiori fu anche sede fortificata dell'ammiragliato ai tempi della Repubblica Amalfitana ; infatti, per difendere la loro indipendenza e sicurezza le popolazioni dei paesi della Costiera sentirono il bisogno di unire le forze : ebbe vita il 1°dicembre 839, secondo quanto afferma lo storico Camera, la Repubblica Amalfitana a carattere popolare, per assumere poi forma decisamente aristocratica.

La Chiesa Santa Maria a mare fu elevata ad Insigne Collegiata dal Papa Giulio II il 5 giugno del 1805 e fu affidata ad un Capitolo di Canonici ed al parroco, detto "prevosto", titolo ancora oggi usato; fu elevata a Santuario Mariano il 13 agosto del 1973, per l'innumerabile afflusso di gente, che, da tutta la costiera, si reca dalla Madonna per ringraziarla ed supplicarne il patrocinio.

La Chiesa, a cui nel passato si accedeva dal lato opposto, ha assunto la grandiosa impronta attuale attraverso i notevoli restauri subiti nel corso dei secoli. Nel XII secolo l'antica chiesa dedicata a San Michele fu parzialmente demolita, ampliata e dedicata a Santa Maria a Mare.

Della rocca, ove era situata la vecchia chiesa, rimase solo la grande torre maggiore quadrangolare, trasformata in campanile con l'aggiunta sui merli di un ottagono e, su questo, di un cono con colonnetta marmorea in cuspide.

La facciata è settecentesca ed in essa si aprono tre porte in bronzo. Quella centrale, quasi il doppio delle laterali, con semplici battenti in bronzo, è sormontata da una lunetta, su cui sovrasta un imponente frontone triangolare.

L'interno della chiesa, ricostruito nel secolo XVIII dall'architetto neoclassico napoletano Pietro Valente, si presenta a tre navate, separate da pilastri, con archi a tutto sesto. La navata centrale è coperta da un soffitto a cassettoni, eseguito nel 1529 dall'artista napoletano Alessandro De Fulco, al centro del quale spicca, in rilievo, una copia della statua di Santa Maria a Mare. La pianta è a croce latina.

Il transetto è sormontato da una cupola, rivestita all'interno con stucco da una maglia di ottagoni.

2.1 Cenni storici della Chiesa

La Chiesa Santa Maria a Mare è ubicata sul colle Torina, dove in epoca remotissima, stando alla tradizione, sorgeva il Castello del Lucumone etrusco, sulle cui rovine nel secolo IX a difesa dei Longobardi i Maioresi edificarono una roccaforte detta Rocca Sant'Angelo così chiamata dal nome di una chiesa dedicata a San Michele Arcangelo lì costruita.

Nel secolo XIII la suddetta chiesa fu ampliata divenendo Basilica, a seguito del rinvenimento a Maiori della prodigiosa Statua della Madonna avvenuta nel 1204 proveniente forse da Costantinopoli quando la capitale bizantina fu spogliata di

tutti i suoi tesori d'arte dai mercanti francesi e veneziani. La miracolosa Icona fu rinvenuta in una balla di cotone gettata in acqua per alleggerire il carico da un bastimento proveniente dall'oriente sorpreso da una tempesta mentre attraversava il mare a vista di questa città; dalla balla trasportata sulla spiaggia dalla corrente di mare e aperta dai marinai accorsi, venne fuori la Statua della Madonna con il Bambino nel braccio destro, invocata dai Maioresi Santa Maria a Mare.

Lo stile orientale della Statua originaria scolpita in legno di cipresso, fa avanzare l'ipotesi che possa trattarsi di una delle poche Immagini sacre scampate nel VIII secolo alla furia iconoclasta dell'imperatore bizantino Leone Isaurico; sarebbe stata in tale frangente nascosta e custodita da fedeli in Tolemaida di Siria da dove poi sarebbe arrivata a Maiori.

Nel 1494 in occasione di taluni lavori di restauro della Basilica venne temporaneamente alloggiata sull'altare della Cappella di San Vincenzo, che era là dove è attualmente il Battistero; ma la sera del 4 agosto di quell'anno per un fatto miracoloso la statua fu rinvenuta nuovamente nella primitiva tribuna.

Nel 1836 su disegno dell'architetto napoletano Pietro Valente la Chiesa subì sostanziali modifiche nel senso che la sua struttura originaria ne uscì capovolta.

Nel 1866, essendo stati completati tali lavori di ammodernamento e di ristrutturazione, con solenne rito si procedette alla traslazione della miracolosa Statua dalla vecchia alla nuova tribuna, collocata sopra l'altare maggiore.

L'atto di traslazione, che fu autenticato dal notaio Cerasuoli, porta la data del 5 agosto 1866.

La Basilica venne nel 1505 dal Papa Giulio II insignita con il titolo di Collegiata, privilegio confermato con la Bolla del 1742 del Papa Benedetto XIV nonché del regio assenso del 6 febbraio 1789 e definitivamente riconosciuto dal Concordato del 1818.

Essa subì trasformazioni e ampliamenti anche nel 1529 e nel 1748.

Di antico rimane il soffitto lacunare dorato a cassettoni, eseguito nel 1529 dal pittore napoletano Alessandro De Fulco su commissione delle famiglie maioresi Mezzacapo, Lanario e De Ponte.

Nel 1662, in occasione di un rimaneggiamento dei restauri della Chiesa, venne realizzata sul soffitto dal pittore napoletano Paolo de Matteis una tela rappresentante l'Assunta e l'Eterno Padre e ai piedi un frate francescano che dovrebbe rappresentare l'offerente.

Interessante è il rivestimento esterno della bella cupola con lamelle maiolicate gialli e verdi e l'intradosso rivestito con stucco di una maglia di ottagoni.

Monumentale la sagrestia a croce greca dalla cui loggia come da un belvedere si ammira l'ampio golfo e la cripta, che conserva un pregevole pavimento in maiolica figurata, ad essa sottoposta nella quale riposano le reliquie del martire San Clemente, portato a Maiori da Roma nel 1780.

La Sagrestia e la Cripta risalgono al secolo XVIII.

Tra i tesori, oltre alla pregevolissima e miracolosa statua della Madonna incoronata di duplice corona d'oro dal Collegio Vaticano dei canonici il 15/8/1769 e, a seguito di furto sacrilego, una seconda volta il 15/8/1804, si annovera una scultura in alabastro con figure gotiche a basso rilievo del 1500,

una cassetta di ebano contenenti sacre reliquie, sempre del 1500, arredi sacri, opere d'arte varie, statue antiche, quadri etc.

Monumentale, anche, l'organo plurifonico costruito dal celebre Zeno Fedeli di Foligno. Il Campanile costruito nel XV secolo sulla grande torre quadrangolare della ex Rocca Sant'Angelo con l'aggiunta sui merli di un ottagono sormontato da un cono, venne abbattuto durante le operazioni di ammodernamento del 1836 e sostituito con quello attuale.

Delle undici grandi campane, prima esistenti, ne rimangono due, fuse rispettivamente nel 1334 e nel 1339; le altre furono trafugate dai Pisani.

Il Collegio dei canonici della Chiesa, istituì recentemente un Museo nella Sagrestia, per la conservazione e la tutela di tutti gli oggetti preziosi e del residuo patrimonio delle opere d'arte, che nel tempo in gran parte sono andate disperse.

Alla Collegiata si accede dalla piazza Raffaele D'Amato mediante una scala detta Scala Santa, oppure per la via Pedamentina che porta al rione Campo sempre tramite una lunga scala. In data 13 agosto 1973 è stata inaugurata una terza comoda strada carrozzabile che dalla via Capitolo porta direttamente alla collegiata. Nello stesso giorno con Rescritto Vescovile la Collegiata venne proclamata Santuario Mariano.

Di notevole importanza fu la radicale trasformazione della Chiesa compiuta dall'architetto napoletano neoclassico Pietro Valente nel secolo XIX, e precisamente tra il 1833 e il 1863; egli, infatti, realizzò un capovolgimento dell'edificio religioso ampliandolo verso occidente e spostando l'ingresso principale sul fronte orientale, soluzione, certamente, scenografica, attesa la

posizione fortemente rilevante della chiesa, dominante verso la programmata piazza centrale.

L'impianto della chiesa, prima degli interventi del 1800, presentava l'ingresso sul fronte occidentale e tre navate che si concludevano in fondo alla Basilica con absidi; quella a sud, in verità, si concludeva con la sagrestia, a pianta quadrata. La pianta originaria è documentata da una planimetria settecentesca conservata presso l'Archivio Segreto Vaticano.

Osservando tale planimetria si può notare anche la posizione del vecchio campanile, a pianta pressoché quadrata, vicino all'ingresso originario, cioè sul fronte occidentale e l'abitazione del Preposito sul fianco meridionale, con accesso autonomo, comprendente una grande sala voltata a crociera e varie camere.

La chiesa originaria, come quella attuale, era caratterizzata da una serie di pilastri cruciformi, che separavano le tre navate, sui quali si impostavano gli archi e le volte a vela delle navate laterali e si appoggiava il soffitto ligneo a cassettoni e la copertura superiore a tetto.

Il Valente caratterizzò il nuovo impianto Basilicale adottando lo schema a croce latina, inscritta in un rettangolo; infatti sfruttò la vecchia disposizione aggiungendo ad essa uno schema a croce greca che rispettasse le proporzionalità proprie della chiesa; infatti, la chiesa originaria presentava la dimensione della larghezza della navata centrale pari al doppio di quella delle navate laterali; quindi, nel rispetto di tali proporzionalità le dimensioni della croce greca sono in larghezza pari a quelle della navata centrale e in lunghezza pari al doppio, cioè i

bracci della croce, coperti con volte cilindriche, in lunghezza sono la metà e lo spazio centrale è di ugual lunghezza; gli spazi laterali alla croce greca, per completare il quadrato di ampliamento, sono di forma quadrata e di lato pari alla larghezza delle navate laterali e coperte, a loro volta, con volte a vela.

Lo spazio centrale della croce greca della nuova parte è sormontato da una cupola emisferica che si appoggia tramite i cosiddetti pennacchi su quattro pilastri ; tale cupola conferisce alla spazio interno una improvvisa dilatazione verticale.

Le altre modifiche rilevanti apportate dall'architetto napoletano furono lo spostamento del campanile a ridosso del nuovo ingresso e il grande abside, coperto con una semicupola, in conclusione della navata centrale dove fu costruito l'altare e deposta la Statua della Vergine.

Altri interventi interessavano il fronte meridionale, regolarizzando e ricostruendo, quasi integralmente, l'intera navata laterale, posta in comunicazione con un'ampia sagrestia e con l'abitazione del Preposito su due piani, e realizzando una specie di ballatoio scoperto a fianco della chiesa, oggi il corridoio che scende alla cripta, sfruttando le ingenti opere di sostegno rese necessarie dall'ampliamento.

I lavori ottocenteschi nacquero da una esigenza dovuta all'incremento progressivo della popolazione; infatti, in quegli anni si andava prospettando un rinnovamento urbano connesso all'apertura, preordinata in epoca francese ma compiuta in età borbonica, della strada costiera. Per quei centri della penisola Amalfitana, collegati da strade anguste ed impervie, transitabili a piedi o a dorso

di mulo, la creazione di nuove vie rotabili per Salerno e verso Napoli significa la rottura di un secolare isolamento, fisico e talvolta persino culturale.

Il programma di lavori di restauro della chiesa fu articolato in due fasi fondamentali : la prima relativa alla realizzazione dell'ampliamento a occidente, la seconda riguardante la riconfigurazione delle navate e la costruzione del nuovo corpo di ingresso.

Approvato il progetto architettonico dal Ministro degli Affari Interni con nota del 3 giugno 1835, i lavori, eseguiti in economia sotto la direzione tecnica dello stesso Valente, iniziano il successivo 3 settembre. Nel 1836, come attesta una cronaca manoscritta di quell'anno, si stava demolendo il vecchio campanile e si incominciava a costruire alcuni pilastri per il sostegno dell'abitazione del Preposito.

In verità vi furono varie difficoltà nel portare avanti i lavori; infatti impegnativi risultano i preliminari interventi per il taglio del monte, dovendo ricorrere, dopo l'asportazione degli strati superficiali brecciosi e cretosi, all'impiego delle mine per sbancare il sottostante conglomerato calcareo; onerosi, inoltre, furono le opere di costruzione lungo la ripidissima scarpata meridionale.

Fondamentale fu lo studio dei materiali da utilizzare per la nuova costruzione: per le opere di fondazione e per i pilastri fu scelta la pietra calcarea di risulta dallo sbanco per le nuove fondamenta; per le opere di copertura, come la cupola e le volte fu invece fatto arrivare da Napoli, via mare, il tufo di Posillipo che più si prestava alla costruzione di tali strutture.

Altri materiali provenivano via mare : i quadroni per la pavimentazione da Ischia, i mattoni del Granatello, alcuni stucchi da Napoli; tali materiali venivano portati al livello della chiesa attraverso traini e argani oppure a spalla per settanta o più gradoni.

La scelta accurata dei materiali può essere dovuta al fatto che il tufo rispetto alla pietra calcarea è più lavorabile, cioè si può tagliare in conci più piccoli, senza lesionarsi, e quindi essere utilizzata più facilmente per la costruzioni di archi, volte e cupole.

Infatti la realizzazione di tali coperture è più delicata in confronto alla costruzione di pilastri o colonne perché il concatenamento dei conci deve formare delle superfici curve e deve consentire l'equilibrio della struttura secondo la propria geometria.

Ritardi e interruzioni sono da attribuirsi in primo luogo alle difficoltà economiche, in quanto, risultando impegnato il Comune in altre onerose opere pubbliche, i fondi per il restauro e l'ampliamento della chiesa furono ottenuti attraverso offerte volontarie, soprattutto con il contributo dei panettieri e con una percentuale sulle imposte della Costiera.

Nell'arco di vent'anni, i lavori diretti da Valente esauriscono solo la prima e più delicata fase costruttiva, giungendo, dopo la demolizione della torre campanaria con il recupero di materiali utili e lo spianamento del banco di roccia, alla compiuta realizzazione, sino alle rifiniture, della nuova crociera, incluso il vestibolo secondario, il campanile provvisorio, oggi non più esistente, e il passetto scoperto verso l'abitazione del Preposto.

Di chiara matrice rinascimentale non solo la nuova crociera, con reminiscenze di Bramante e Leonardo, ma anche la combinazione dei due organismi, che si propone come reinterpretazione della concezione martiniana di pianta composta tra la “rotonda” e “l’angolare”, in questo caso tra la centrica e la longitudinale.

Evidente è la ricerca di una perfetta simmetria: uguagliata la profondità dei bracci del transetto alla larghezza delle navate laterali, le due parti dell’edificio, la crociera dell’ampliamento e il più antico e irregolare corpo basilicale, vengono, infatti, saldate all’interno di una compatta sagoma rettangolare, con la sola emergenza dell’abside.

A sua volta, l’intervento decorativo, oltre a porsi quale fattore unificante, consente di ‘assorbire’ otticamente, nel ritmo degli elementi minori, le difformità delle campate derivanti dalla costruzione medievale.

Se l’impaginato architettonico è affidato all’ordine di pilastri a base attica e ridisegnati capitelli corinzi, con architrave e fregio liscio, ulteriori costolature e cornici moderatamente aggettanti scandiscono ogni membratura architettonica.

Di alto valore architettonico è il trattamento delle volte : cassettoni quadrati nelle volte a botte della crociera; pentagonali alternati a rombi nelle vele delle cappelle; esagonali ad alveare nel catino dell’abside e ottagonali misti a rombi nell’intradosso della cupola.

Tornando alle vicende costruttive, finalmente, il 5 agosto 1866 con atto pubblico redatto dal notaio Cerasuoli, si procede alla benedizione della crociera e alla Solenne traslazione della miracolosa Statua di Santa Maria a Mare alla nuova tribuna della basilica.

Come si evince dalla descrizione della cerimonia, a tale data vi erano dei lavori in corso riguardanti probabilmente le navate; così come all'estremità orientale doveva ancora esserci l'antico coro ospitante la tribuna della sacra Icona.

La demolizione di quest'ultimo e la realizzazione della facciata individuano, infatti, l'ultima fase costruttiva, conclusasi, unitamente ad alcuni abbellimenti, addirittura negli anni novanta di quel secolo.

L'interno della chiesa e della stessa sagrestia fu uniformato ai partiti architettonici e decorativi disposti da Valente, mentre per il corpo d'ingresso sono state abbandonate le previsioni del progetto iniziale, relative alla presenza del vestibolo e al più articolato raccordo della scala a doppia rampa, indebolendo l'immagine e la valenza urbanistica del monumento.

2.2 Materiali e tecniche costruttive adottate nel restauro del 1800

Da un computo metrico risalente al 1833 e redatto dallo stesso architetto Valente, si è potuto evincere che i lavori dell'ampliamento della chiesa, che avvennero tra il 1833 e il 1863, furono suddivisi nelle seguenti fasi:

- a) Demolizione della antica torre campanaria ad occidente
- b) Costruzione di un campanile provvisorio sul lato a nord della chiesa
- c) Sbancamento e taglio del monte per le nuove costruzioni ad occidente
- d) Costruzione della nuova parte

La demolizione del vecchio campanile fu realizzata con cura di non danneggiare i materiali risultanti, come piperni, legname, etc. per poterli utilizzare per le nuove costruzioni; ciò ci dà un'idea delle difficoltà economiche che vi erano per

il completamento dei lavori e della capacità dell'architetto Valente di poter sfruttare al massimo le risorse del luogo e del manufatto esistente.

Sicuramente, da ciò che ci è tramandato dal computo metrico di quel tempo redatto dallo stesso costruttore, egli analizzò attentamente lo stato dei materiali di risulta; infatti valutò con cura quali fossero idonei da potersi utilizzare nelle nuove costruzioni.

Parte del materiale del vecchio campanile fu utilizzato per la realizzazione del campanile provvisorio, che oggi non esiste più.

Di notevole fattura fu, anche, lo sbancamento del terreno e il taglio del monte per la realizzazione delle fondamenta della nuova zona.

Il terreno si presentava in un primo strato di materiale breccioso e cretoso, mentre inferiormente era composto da conglomerato calcareo.

Per il primo strato fu sufficiente lo scavo semplice, mentre per il secondo fu necessario l'utilizzo di mine.

Il materiale di risulta di pietra calcarea che risultò non particolarmente danneggiato fu utilizzato per le nuove costruzioni, per prima la realizzazione di piloni ed archi di sostegno del lato a sud della chiesa.

La costruzione della nuova parte fu iniziata con il rinforzo dei pilastri cruciformi di confine tra la parte vecchia e la nuova: venne aumentata notevolmente la loro sezione resistente per poter farli resistere alle nuove sollecitazioni.

Quindi tutti i muri nuovi furono realizzati con il materiale di risulta di pietra calcarea.

Per le opere di copertura, come la cupola e le volte fu invece fatto arrivare da Napoli, via mare, il tufo di Posillipo che più si prestava alla costruzione di tali strutture.

Altri materiali provenivano via mare : i quadroni per la pavimentazione da Ischia, i mattoni del Granatello, alcuni stucchi da Napoli; tali materiali venivano portati al livello della chiesa attraverso traini e argani oppure a spalla per settanta o più gradoni.

La scelta accurata dei materiali può essere dovuta al fatto che il tufo rispetto alla pietra calcarea è più lavorabile, cioè si può tagliare in conci più piccoli, senza lesionarsi, e quindi essere utilizzata più facilmente per la costruzioni di archi, volte e cupole.

Infatti la realizzazione di tali coperture è più delicata in confronto alla costruzione di pilastri o colonne perché il concatenamento dei conci deve formare delle superfici curve e deve consentire l'equilibrio della struttura secondo la propria geometria.

Un altro motivo, che convinse il Valente ad utilizzare il tufo per le strutture di copertura, fu probabilmente l'elevato peso specifico della pietra calcarea.

Di alto valore architettonico, inoltre, è il trattamento delle volte : cassettoni quadrati nelle volte a botte della crociera; pentagonali alternati a rombi nelle vele delle cappelle; esagonali ad alveare nel catino dell'abside e ottagonali misti a rombi nell'intradosso della cupola.

Approfondiamo, ora, le tecniche costruttive della cupola : l'apparecchio consueto nelle volte a bacino in muratura ha i giunti fra concio e concio diretti secondo i

piani meridiani della volta e secondo i piani tangenti alle superfici coniche con centro sull'asse di simmetria e passanti per i cerchi meridiani della superficie di intradosso.

I conci appartenenti a ciascun filare, cioè compresi fra la stessa coppia di superfici coniche, sono sfalsati rispetto ai conci dei filari sottostante e soprastante.

Questo concatenamento, insieme alla resistenza a taglio della malta dei giunti trasversali, svolge la sua funzione statica quando non resta verificata l'ipotesi della continuità dei sostegni sui quali grava la volta.

Infine la seconda curvatura della cupola, quella che ha centri sull'asse di rivoluzione, contribuisce anche essa alla funzione di arco di scarico assunta dai filari di pietra nella direzione circonferenziali.

Le calotte delle cupole in muratura ben costruite possono quindi restare in equilibrio anche se poggiate su limitati settori della zona basamentale.

Quando si procede alla costruzione di una cupola in muratura, la prima attenzione è rivolta alla sua forma, e quindi alla scelta della centinatura, e poi se si deve o no fare uso del manto, insieme di tavole poste sull'armatura principale per formare la sagoma della cupola. Il manto è necessario per le cupole in conci di pietra, ma si può omettere per le cupole in mattoni, disponendo le centine una vicino all'altra, ad uguale distanza tra loro, in modo che si incontrino tutte in chiave. Evidentemente gli strati inferiori si possono porre facilmente in opera senza manto, perché il loro piano di posa si scosta poco dall'orizzontale e ciascun strato forma un anello chiuso, che non ha bisogno di altro appoggio. Inoltre si

deve curare la posizione dei giunti in modo che siano normali all'intradosso; ciò si ottiene con il tendere un filo dal centro fino all'intradosso della volta.

In generale la parte più difficile da costruirsi di una cupola, e specialmente di quella sferica, è quella in chiave, perché i giunti riescono troppo vicini alla verticale, ed i mattoni hanno una forma troppo poco conica. Si cerca quindi di fare più grande possibile il cuneo di chiave, oppure rendere più leggera la zona in chiave costruendola con mattoni leggeri.

Per questa ragione e perché la chiave offre la posizione più adatta per una apertura, che dia luce ed aria al locale coperto dalla volta, si omette del tutto la zona in chiave e si chiude la copertura con la cosiddetta lanterna.

La cupola può essere impostata su un appoggio continuo, come lo è il tamburo, oppure, se la si vuole costruire su una pianta quadrata, su i cosiddetti pennacchi, i quali hanno una loro funzione statica(fig.).

Ora, noi vogliamo approfondire la condizione di appoggi isolati di una cupola perché ci riguarda da vicino in quanto la cupola della chiesa Santa Maria a mare di Maiori è impostata su pennacchi.

I primi ad utilizzare questo tipo di sistema di appoggio furono gli Etruschi, che usarono la tecnica costruttiva delle paleovolte, per mensole successive sporgenti.

La funzione statica di questi pennacchi è quella di contrastare la spinta della calotta; infatti, questi presentano una buona rigidità estensionale che si contrappone a quella della cupola che tende ad aprirsi all'imposta. La presenza di tali strutture di sostegno varia, però, tutte le sollecitazioni interne alla copertura; infatti le isostatiche non seguono più le direzioni dei meridiani e dei paralleli, ma

nascono degli sforzi di taglio, tangenti alla superficie, per effetto delle particolari condizioni di appoggio, che fanno mutare le direzioni principali degli sforzi; infatti la struttura tende a scaricare tutto il suo peso sugli appoggi discontinui, e ciò fa sì che si crei una zona di compressione vicino ai pennacchi e che le isostatiche cambino.

Il problema di impostare una cupola su pianta quadrata è stato uno dei principali motivi di studio nella storia dell'architettura, risolto a pieno con l'invenzione dei pennacchi sferici, elementi di una volta a vela impostata su quattro pilastri e troncata da un piano orizzontale che ne sega l'intradosso in un cerchio sul quale può svolgersi una calotta, elemento della stessa sfera a cui i pennacchi stessi appartengono; oppure appartenenti a un'altra superficie di rivoluzione che offre la base circolare all'anello di imposta della cupola. Questo è appunto il caso della chiesa di Santa Sofia di Costantinopoli.

Dal punto di vista della progettazione strutturale, intorno agli anni 30 del secolo XVIII si ha, con il Bouguer, una prima teoria sulle cupole che si basa sull'equazione differenziale di una catenaria 'rovesciata'; infatti, in quegli anni si sviluppò il problema intorno al tema dell'equilibrio funicolare e alla cosiddetta catenaria, posizione assunta da una fune pesante fissata alle sue estremità.

Il Bouguer partì da questo presupposto e determinò analiticamente le condizioni di equilibrio ottenendo un'espressione che definiva la superficie della cupola omogenea equilibrata, come riferimento per una qualsiasi curva che si traccia da uno stesso vertice; egli affermava che ogni altra curva, che genera una superficie di rivoluzione, che spiccandosi dallo stesso vertice si allarghi più di quella

equilibrata dall'asse, mantenendosi ovunque meno concava, poteva descrivere una cupola equilibrata.

Il contributo più lineare, arrivò, alla fine del settecento, da parte del Mascheroni, matematico bergamasco, che approfondì il concetto fondamentale perseguito, durante il XVIII secolo, nel calcolo delle cupole in muratura : mentre nell'arco in cui gli sforzi di compressione dovevano essere ortogonali ai letti di malta tra i conci, nell'ipotesi di assenza di attrito, nella cupola è sufficiente che la risultante tra la spinta in chiave e il peso della parte sovrastante, pur obliqua al giunto, cada 'con maggior pendenza', cioè che essa deve tendere verso l'interno della cupola e quindi creare compressione negli anelli (fig.1.1.4)

Il Mascheroni, infatti, basò la sua teoria sul concetto di collaborazione degli anelli paralleli con i meridiani per il sostegno statico della struttura. Egli da ciò ne trasse dei risultati analitici che si avvicinano molto al comportamento reale della copertura; infatti, egli arrivò a dimostrare che per una cupola emisferica di spessore costante, si ha trazione nei paralleli dall'imposta al giunto al rene.

Da ciò possiamo trarre la conclusione che l'architetto Valente, costruttore della cupola della chiesa di Santa Maria a mare a Maiori, era a conoscenza di queste teorie e delle problematiche riguardanti questo tipo di copertura.

Tutti questi studi servirono come introduzione a delle teorie del secolo XIX che contribuirono a definire le curve e le superfici di pressione e le condizioni di equilibrio per le volte e gli archi, in presenza di attrito.

L'architetto, sicuramente, scelse il profilo emisferico perché presenta un certo fascino dal punto di vista estetico e una forma che dà armonia a tutta la chiesa.

Quindi, consapevole dei problemi strutturali delle cupole emisferiche, andò alla ricerca di un sistema che potesse contrastare tali sollecitazioni.

Il Valente impostò la cupola su pennacchi, di cui conosceva bene la loro funzione, non solo di appoggio su piante quadrate; i pennacchi, infatti, sono delle strutture che permettono di raccordare una cupola con la struttura sottostante, nei casi che la calotta sia imposta su piante poligonali, specialmente quadrate.

In questo senso tali pennacchi hanno un effetto benefico sulla cupola, perché creano all'imposta delle zone di compressione e sono capaci di ridurre gli sforzi di trazione nei paralleli.

Se, infatti, consideriamo il profilo emisferico sappiamo bene che non vi è spinta sulla struttura di appoggio, ma è presente la trazione nei paralleli dalla sezione al rene fino all'imposta ed in questo caso l'effetto benefico dei pennacchi è la riduzione delle sollecitazioni di trazione; se, invece, si ha un profilo con tangente non verticale all'imposta, si hanno sicuramente spinte sulle strutture sottostanti, mentre si riduce la zona di trazione, e in questo caso i pennacchi contrastano tali spinte.

Da ciò possiamo trarre la notevole validità statica di tali pennacchi, anche perché, oggi, sappiamo bene che per coperture in muratura vi sono infinite curve di pressione, comprese nello spessore, che possono verificare l'equilibrio di tali strutture e quindi infiniti possibili profili, da quello emisferico a quello parabolico.

Infine dobbiamo dire che la cupola, specie, quando è la struttura principale di un edificio di carattere religioso, viene vista tantissime volte sotto due contrastanti esigenze estetiche.

La prima è quella di caratterizzare lo spazio interno o limitandolo nel gioco delle proporzionalità perfette o rendendolo magicamente luminoso; la prima necessità si sente nella radice latina della parola : cupola da cupo (cavo, profondo).

La seconda esigenza è definita nello spazio esterno : la cupola è eretta per concludere la chiesa, la casa del Signore e casa di tutta la comunità, che in essa vede il suo cuore, il suo centro, la sua casa ultraterrena come dice il sinonimo duomo, etimologicamente derivato da δῶμα.

2.3 Il Valente e il neoclassicismo nel napoletano

Per la sua genesi e per le sue forme l'arte neoclassica, sviluppatasi tra la metà del XVIII e la fine del XIX secolo, ci appare innanzitutto come il risultato di una reazione alle ultime e meno valide espressioni del barocco e del rococò, aiutata da un contemporaneo e profondo mutarsi dell'ambiente, del costume, del pensiero e del gusto di quella società in grembo alla quale era chiamata a fare le sue prove.

L'ultimo barocco, arte devota al colpo d'occhio e alla sensualità leggera, alle fluidità pittoriche di toni e colori, alla magniloquenza statuaria dei gesti, al virtuosismo architettonico, non poteva che urtare contro un gusto che cerca nuova semplicità e schiettezza, aderenza tra sé e il proprio costume e il proprio rinnovato sentire, e contro un pensiero che ispira e cerca un carattere di limpida

logica, di aderenza morale anche nelle opere degli artisti e con tali criteri tende a giudicarle.

Nel contempo quell'interesse di cultura e di esempio che romanità e grecità avevano sempre esercitato sugli artisti, e che a metà del Settecento viveva in sordina, si stava rapidamente rinnovando e via via approfondendo con la spinta e scoperte archeologiche disordinate oppure fortunatissime, con la rinascita dello spirito antiquario, del collezionismo e della museografia. L'antichità diviene parte viva della cultura.

Uno dei primi teorici, il Winckelmann, affermava che, attraverso l'imitazione della natura, scopo dell'arte è realizzare il bello ideale; questa bellezza ideale non esiste in natura e spetta all'artista crearla con la forza del suo intelletto. Secondo lo storico, solo i Greci hanno raggiunto questa bellezza ideale e all'artista non resta che calcare pedissequamente le loro orme.

Nato in un mondo di aristocrazie, cresciuto in un mondo di rivoluzioni, di guerre e di riforme, esauritosi lentamente in un mondo ormai borghese, nell'urto delle filosofie e delle idee, delle opere e dei sentimenti, il neoclassico rappresenta il tessuto connettivo della società europea in profondo e rapido evolversi. Mescolata profondamente, per la prima volta nella storia, a tutta la vita sociale del tempo, l'arte rifece il volto della città, ricreò l'urbanistica, chiamò l'edilizia ai nuovi bisogni sociali pubblici e privati, fondò i musei e le accademie, influì sul pensiero e sulle lettere, elaborò la prima dottrina estetica, la prima storia e critica d'arte, fu la madre di tutti i movimenti e le conquiste dell'arte moderna.

L'architettura, in quel periodo, ebbe le sue particolari dottrine e caratteristiche :

ai rigonfiamenti di travi, pilastri e colonne, alle sovrabbondanze decorative di porte e finestre, balconi e balaustre, alle piante bizzarre di edifici, alla pittorica modellatura degli alzati si sostituiscono la chiarezza dell'aspetto esteriore, la corrispondenza delle costruzioni al loro scopo, la lineare semplicità della decorazione. Dell'architettura, che deve sempre aderire alla natura del materiale impiegato, restano le forme pure, i volumi necessari, le proposizioni armoniche, rapporti che, come nella musica le sette note, possono dar luogo a infinite variazioni.

Partendo da questi principi, gli architetti neoclassici cercarono la bellezza ideale, bellezza che è “nella coerenza balla di parti belle”, nella rappresentazione armonica dello spazio attraverso il valore costruttivo dei volumi e il ritmo del rilievo e delle superfici. Alla fine del Settecento, i loro canoni saranno solo negli ordini di Grecia e Roma.

Vi furono due fattori importanti per lo sviluppo del neoclassicismo : uno è la non visibile e pur sostanziale trasformazione nella distribuzione degli interni; infatti viene risolto con le planimetrie dei nuovi edifici i nuovi bisogni, problemi diversi, quesiti nuovi e talora ardui. L'altro sta nel rinnovarsi della tecnica, spesso trascurata nel Seicento e al principio del Settecento; tecnica d'uso dei vecchi materiali, l'impiego dei nuovi materiali, nascita di strutture rispondenti ai nuovi bisogni e ai nuovi problemi costruttivi. Vi è, infine, l'urbanistica, l'architettura della città, dai progetti approvati ma abortiti di Milano alle sistemazioni di Genova, Torino, Roma.

Per definire, nelle grandi linee, il quadro neoclassico napoletano converrà innanzitutto ricordare che, con l'avvento del regno di Carlo di Borbone, la città riprese il ruolo di capitale del regno, risollevandosi dal torpore culturale e dal provincialismo che aveva sostanzialmente caratterizzato il lungo il periodo del vicereame (1503-1734), durato oltre due secoli.

Al cosmopolitismo e alle nuove idee ispirate all'illuminismo e alla cultura francese si accompagnò il sorgere di opere degne di una grande metropoli, sebbene queste fossero per lo più ispirate al sovrano dai suoi personali desideri, piuttosto che dalle reali esigenze della popolazione.

Soltanto dopo la metà del secolo, si andò affermando a Napoli una tendenza più esplicitamente classicista, per la venuta di Ferdinando Fuga e Luigi Vanvitelli, educati in ambiente romano. Tuttavia né il Fuga, impiegato a Napoli prevalentemente in nude fabbriche di pubblica utilità, e spesso assai inferiore alla sua opera romana, né il Vanvitelli, che colse nella reggia di Caserta la sua suprema occasione, possono dirsi architetti neoclassici, il primo incerto tra il classicismo incipiente e il decorativismo tradizionale, il secondo impegnato a ripercorrere, in chiave classicistica, temi della tradizione italiana del rinascimento e delle correnti barocche, recuperando il senso degli equilibri spaziali dei maggiori maestri che lo avevano preceduto.

Una iniziale adesione al gusto neoclassico sono evidenti nelle opere degli architetti napoletani dell'ultimo ventennio del Settecento.

Tipico esponente della transizione al classicismo fu Carlo Vanvitelli, che aveva iniziato la esperienza accanto al padre a Caserta, nel 1763, a poco più di venti

anni. Sebbene si debba tener conto della possibilità di servirsi di schizzi, disegni, idee e studi lasciati dal padre, va attribuita a lui gran parte della decorazione architettonica dei vasti ambienti della reggia sia nella fase dal 1773 al 1780, quando la famiglia reale andò ad abitare a Caserta, sia nella fase della ripresa dei lavori dopo la rivoluzione del 1799 e fino al 1805, allorché nelle carte il suo nome risulta sostituito da Antonio De Simone, architetto di corte, impegnato anche a Capodimonte e partecipante col Laperuta al concorso per San Francesco di Paola.

Fondamentale importanza nella genesi del neoclassico, non soltanto a Napoli, ebbero le scoperte di Ercolano e Pompei, così da far scrivere che dagli scavi di Ercolano sarebbe sorto il sistema ideale del neoclassicismo; inoltre, evento di particolare rilievo, per la diffusione della cultura neoclassica, fu la fondazione dell'Accademia Ercolanese, ad opera di Carlo di Borbone, avvenuta nel 1755.

Ad essa fece capo, dal 1757 al 1792, la pubblicazione degli otto volumi “Antichità di Ercolano”, accompagnati da tavole ripubblicate più volte, a Londra nel 1773, nel 1789 dall'artista Tommaso Piroli, tra il 1785 e il 1788 nell'ambiente francese.

Nei primi trent'anni del secolo l'ambiente artistico di Napoli era assai vivo e vi operavano architetti di valore quali Antonio Niccolini, Pompeo Schiantarelli, Pietro Valente, i fratelli Gasse, Giuliano De Fazio, Leopoldo Laperuta, Francesco De Cesare, che con le loro opere di notevole valore contribuirono a conferire un volto assai dignitoso alla città.

Nell'agosto del 1816, su invito di Ferdinando I di Borbone, l'architetto Pietro Bianchi giunse a Napoli con l'incarico di esprimere un parere sui progetti per la chiesa di San Francesco di Paola prescelti dal Consiglio degli Edifici.

La relazione, che fu intitolata "Osservazioni sui progetti della Chiesa da costruirsi in onore di San Francesco di Paola", criticava aspramente le soluzioni proposte da Leopoldo Laperuta e Giuliano De Fazio e ebbe l'effetto, evidentemente desiderato, di ottenere lui stesso l'incarico di approntare un nuovo progetto che poi verrà realizzato.

L'opera più riuscita fu, però, senza dubbio la ricostruzione del Teatro San Carlo, eseguita a partire dal 1810 da Antonio Niccolini.

Raramente un'opera di architettura ha procurato al suo autore celebrità più dolorosa di quella inflitta dalla basilica di San Francesco di Paola a Pietro Bianchi; due sono le ragioni fondamentali, perfidamente intrecciate: innanzitutto perché la fortuna della Chiesa napoletana, come meglio vedremo in seguito, non è stata alimentata da entusiastici o unanimi giudizi positivi, quanto piuttosto da variabili estranee al suo intrinseco valore architettonico, come l'imponenza e unitarietà del programma, le vicissitudini concorsuali, le circostanze politiche della sua realizzazione, etc., sulle quali peraltro pesano apprezzamenti non sempre lusinghieri, sgradevoli sospetti, anche drastiche censure. In secondo luogo perché quell'improvvisa e forse eccessiva notorietà ha finito per condizionare in vita l'intera carriera del suo architetto, e offuscare al nostro ricordo ogni altra sua attività.

Pietro Bianchi, quindi, è rimasto fino ad oggi l'autore di un'unica e in un certo senso sfortunata opera : importante e solenne come poche altre del suo tempo, ma non bella e nemmeno coraggiosa, anzi fredda e autoritaria decontestualizzazione dell'antico, che gli è valsa perciò l'ingloriosa reputazione di architetto di fama sostanzialmente mediocre.

L'impianto planimetrico non subì significative variazioni : il Bianchi confermò la scelta della "rotonda" per il corpo centrale della chiesa, seguì fedelmente le linee di fondazione già tracciate per il porticato semicircolare. Viceversa, ciò che mutava radicalmente era la logica compositiva dell'insieme, fondata su una magniloquente gerarchia dei volumi che non permetteva più coraggiosi salti di scala, nessun sublime contrasto, nessuna eversiva giustapposizione di parti equivalenti.

Ora la mole imponente della chiesa, dilatata ancor più dalle cupole delle congregazioni angolari, prende decisamente il sopravvento in posizione centrale avanzata, dove si attesta con il pronao esastilo sormontato dal pesante frontone.

Nel progetto realizzato, la centralità gerarchica della composizione è ancora più accentuata : nella maggior altezza della cupola, nel raccordo di quest'ultima con il cilindro del tamburo, nell'espansione laterale delle congregazioni che introducono un ulteriore volume intermedio tra la chiesa e il porticato.

Se vi è un luogo, nel progetto di Bianchi, dove tutte le tensioni si fondono in una superiore volontà di potenza, questo è l'invaso spaziale della chiesa. Esplicitamente esemplato sul modello del Pantheon, di cui ossessivamente corregge ogni minima imperfezione, questo interno grandioso e così raggelante

sembra attraversato dalla furia maniacale di una sinistra precisione, da un oscuro comandamento geometrico. Qui, in un formalismo meccanicistico di ispirazione tardoromana, nell'esercizio quasi decadente d'una totalitaria regolarità, veramente crollano gli emblemi della ragione e della libertà che il secolo del illuminismo aveva saputo celebrare nelle forme della classicità.

Del progetto di Pietro Valente, per la realizzazione della chiesa di San Francesco di Paola, abbiamo uno schizzo planimetrico e una lunga relazione dell'architetto, a commento del progetto di concorso : rilevata l'impossibilità di servirsi di uno svolgimento basilicale, per il troppo limitato spazio a disposizione, scartata la pianta 'circolare' perché poco coerente, a suo giudizio, col carattere del tempio cristiano e per le consuete ragioni funzionali, per esempio le difficoltà di collegamento con i corpi di fabbrica vicini, il Valente adottò la croce greca, come 'la più adatta per bellezza e regolarità'.

Le differenze che si riscontrano tra tale progetto e l'esecuzione, dovuta al Bianchi, sono notevoli, e ne diamo notizia qui di seguito.

In un luogo di un portico esastilo con pilastri terminali, come è oggi visibile, il Valente progettava un pronao di otto colonne, dal quale si passava in un vestibolo, con ai lati due accessi secondari, separato dallo spazio della chiesa da cinque intercolumni, quanto la larghezza della navata.

La stessa soluzione era prevista dal lato opposto, per la separazione tra chiesa e coro; in tal modo l'architetto otteneva, come egli stesso scrive, 'una continuata estensione', cioè uno spazio continuo, in cui i fusti delle colonne costituivano i soli diaframmi , pensati per ristabilire l'uguaglianza degli spazi della croce greca.

La maggiore verità, ottenuta attraverso la differente soluzione tra i lati della crociera e gli altri due, trovava riscontro nell'autonomia delle coperture, poiché, mentre vestibolo e coro avrebbero avuto soffitto piano, le braccia della croce avrebbero mostrato 'volte cilindriche', che terminavano sugli arconi della cupola; ed anche qui va rilevato che, mentre il Bianchi realizzò altre due cupole minori, ai lati del pronao, il Valente espresse con fermezza il proposito di avere, nella cupola unica, un elemento dominante sul quale far convergere la composizione.

Essa avrebbe avuto un migliore risultato paesistico, ed il Valente stesso, dichiarando tutto il suo rammarico per non aver potuto presentare un maggior numero di prospettive e di particolari, sottolinea l'importanza della cupola :

nel suo progetto questa derivava dall'idea bramantesca per San Pietro, per la struttura a tamburo traforato, con un giro di colonne esterne. Questa soluzione avrebbe fornito un'illuminazione sufficiente attraverso il tamburo, tanto da poter fare a meno dell'oculo centrale con lanternino, adottato dal Bianchi con infelice ripiego. Anche l'ordine delle colonne appare oggi assolutamente diverso da quello progettato dal Valente, poiché, mentre il luganese si servì all'esterno del dorico per i porticati e dello ionico per il pronao, limitando all'interno il corinzio per un più vibrato chiaroscuro nella penombra ed una maggiore ricchezza decorativa, il Valente mostrò di preferire quest'ultimo anche all'esterno.

Un'opera di notevole importanza per l'architetto valente fu la realizzazione del progetto della villa Acton, poi Rothschild, infine Pignatelli Aragona Cortes sulla Riviera napoletana.

Il cavaliere Acton, acquistato il suolo dal principe di Belvedere, aveva affidato al Valente nel 1827 il disegno per la costruzione di tale villa.

Il progetto del Valente doveva dar luogo ad un palazzo che, secondo il costume inglese, doveva sorgere nel verde di un parco e con stile di architettura greca o romana. Per l'esigentissimo cliente l'architetto disegnò più di venti differenti soluzioni, e da un misto di tutti risultò quello, che si eseguì, non di gusto dell'architetto, ma pur bello.

Nata così da un compromesso, la fabbrica aveva tuttavia un impianto pregevole, più ancora che per il disegno ispirato all'antico, per il carattere paesistico di tutto l'insieme, mai abbastanza apprezzato. Piccoli corpi di fabbrica simmetrici in pietra lavica, sulla Riviera di Chiaia, per le abitazioni dei custodi e per la cappella, inquadravano prospetticamente, attraverso una lunga cancellata, la palazzina, innanzi alla quale il Valente distendeva un vasto prato all'inglese, con gruppi di palme.

Dal fronte meridionale la villa appare concepita in forma piramidale, per un efficace raccordo all'ondulato terreno dei prati, attraversati, ai margini estremi, da due viali fiancheggiati da alberi; ciò è ottenuto mediante lo svolgimento di un blocco a due piani, coronato da un timpano classico, innanzi al quale lo spazio interno dei saloni si prolunga verso l'esterno attraverso un porticato di bianche colonne doriche scalanate. I fusti monolitici in marmo venivano ripetuti dal Valente nei due corpi avanzati laterali, ciascuno concluso da timpano, così che, nella veduta da mezzogiorno, si potesse cogliere un digradare di masse, improntate classicamente dai tre timpani e dal colonnato continuo.

La villa, nel primitivo progetto del Valente, era, in questo fronte, tutta articolata attorno ad un atrio rettangolare scoperto, d'ispirazione pompeiana ma privo di decorazioni murali : su di esso si aprivano sale tutt'intorno, meno che per il lato verso il panorama, in cui l'architetto, con felice intuito, disponeva soltanto il duplice colonnato marmoreo; e ciò non soltanto per consentire la visione dei prati alberati e del mare, ma anche per disporre di una vasta terrazza continua al livello superiore dell'appartamento.

Lo spazio dell'atrio, concepito dal Valente totalmente scoperto, ha ricevuto in seguito una copertura in ferro e vetro; ciò ha alterato il rapporto spaziale tra la villa e le ali laterali.

All'interno va ricordato, oltre il vestibolo porticato del fronte a nord, l'atrio circolare a doppia altezza, concluso da una volta con lanternino.

Infine riportiamo di seguito la fotocopia della prima pagina del computo metrico e alcune foto della chiesa.

Opere Pubbliche
Comunali.

Comune di
Majori.

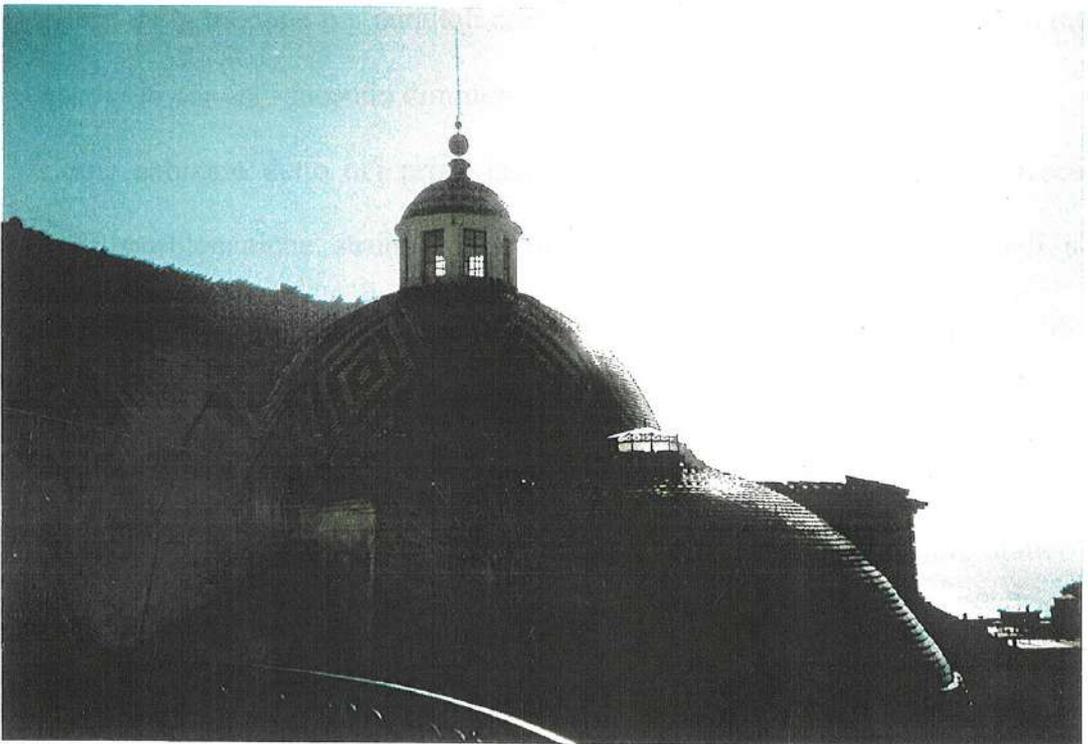
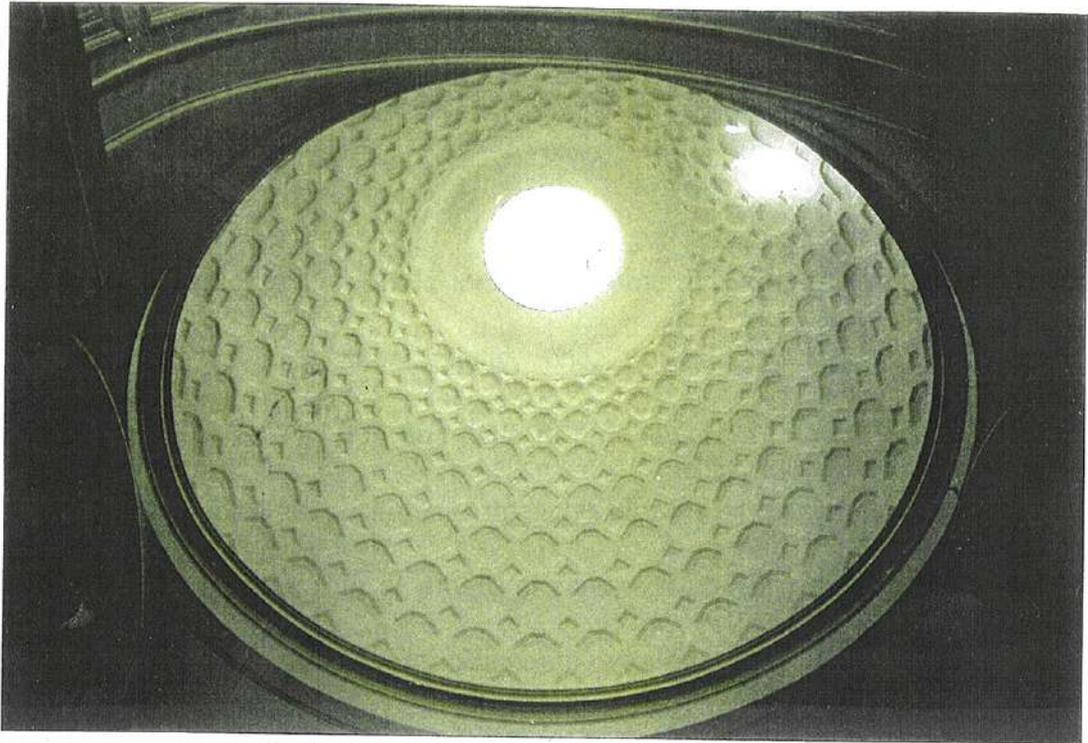
Provincia di Principato
Citeriore.

Misura finale

Di tutti i lascii di ogni natura, us-
quiti in economia nella Chiesa Colle-
giata di Majori, sotto il titolo di
Santa Maria a Mare, secondo il
progetto elaborato dall'Architetto Si-
gnor D. Pietro Salente, e sotto la
Direzione dell'Architetto meco-
simo

Questi lascii di ampliamiento e perfizione della
Collegiata di Majori furono progettati nel 1833,
dal Signor Architetto Salente. Quindi approvato il
progetto, questo cominciò ad essere manciato ad ef-





Capitolo III

Analisi statica della Cupola

3. Generalità

L'analisi statica della cupola avrà come obiettivi dimostrare, in primo luogo, attraverso la teoria membranale, che, potendo la struttura resistere alle sollecitazioni esterne con una delle infinite superfici di equilibrio contenute nel suo spessore, ne esiste almeno una che elimina la trazione nei paralleli dalla sezione di imposta fino al giunto al rene, ma che fa subentrare altri problemi statici, come il possibile schiacciamento della muratura, la parzializzazione della sezione e infine la spinta sui piedritti di sostegno; in secondo luogo, attraverso il metodo degli elementi finiti, si dimostrerà l'efficacia del provvedimento adottato dal Valente con l'appoggio della cupola su pennacchi; infatti questi riducono gli effetti della trazione nei paralleli creando una zona di compressione nei punti di appoggio e quindi facendo diminuire di intensità tali sollecitazioni.

Come abbiamo detto nei primi capitoli, l'architetto Valente era a conoscenza delle problematiche strutturali di questo tipo di strutture, grazie agli studi affrontati dal Bouguer e dal Mascheroni nel XVIII secolo, e da ciò si suppone che egli ne abbia tenuto conto con alcuni accorgimenti.

Si può ipotizzare, infatti, che l'architetto napoletano abbia confidato sulla buona resistenza a trazione delle malte di calce utilizzate e sul contributo statico dei pennacchi.

La malta utilizzata, infatti, veniva realizzata con la calce ottenuta con il calcare prelevato da pozzi nella Costiera; tale malta presentava, diversamente da altri tipi, una buona resistenza alle sollecitazioni di trazione.

Una conferma di tutto ciò che abbiamo detto viene dal buono stato di conservazione del manufatto, che, oggi, presenta alcune lesioni, dovute, però, all'azione del terremoto verificatosi nel 1980.

3.1 Analisi statica della Cupola con la teoria membranale

La teoria membranale, proposta dal Pùcher intorno al 1930 per le volte sottili, considera la struttura resistente in modo bidimensionale, con sforzi contenuti nel piano tangente alla superficie e regime flessionale trascurabile.

Nelle volte sottili, infatti, le tensioni si possono ritenere costanti lungo lo spessore, in quanto le deformazioni che esse producono modificano la curvatura della superficie media, ma, essendo lo spessore piccolissimo e quindi quasi nulla la loro rigidità flessionale, i momenti flettenti e le tensioni di flessione risultano del tutto trascurabili.

Le ipotesi che sono alla base di tale teoria sono le seguenti :

- a) Gli elementi lineari normali alla superficie media della volta, nella configurazione indeformata, si conservano, a deformazione avvenuta, della stessa lunghezza e normali alla superficie media deformata.
- b) Le tensioni normali alle giaciture parallele alla superficie media sono trascurabili rispetto alle tensioni agenti sulle sezioni normali alla volta.

Quindi, lo stato di deformazione è caratterizzato completamente dalle deformazioni della superficie media e analogamente lo stato tensionale viene determinato in ogni punto quando sono note le risultanti delle tensioni agenti su una sezione normale della volta, cioè quando sono note le caratteristiche della sollecitazione.

Le volte in muratura non presentano spessori tali da rispettare le ipotesi della teoria membranale; se, però, la membrana la si pensa come una possibile superficie delle pressioni, contenuta nello spessore della volta, tale teoria può essere utilizzata per la determinazione di un possibile equilibrio.

Di possibili superfici di pressione che verificano l'equilibrio della struttura ne esistono infinite, ma solo quella media presenta tensioni e deformazioni costanti in una sezione; invece le altre superfici inducono delle sollecitazioni di flessione che portano, in alcune situazioni, alla parzializzazione della sezione.

In conclusione, nelle cupole in muratura non sappiamo definire in modo rigoroso quale sia la superficie delle pressioni secondo la quale la struttura si mantiene in equilibrio, ma possiamo definire delle situazioni che comportano dei problemi strutturali differenti. Infatti, se noi analizziamo una cupola emisferica, possiamo notare che utilizzando la superficie media, avremo degli sforzi di trazione nei paralleli dall'imposta fino alla sezione al rene ; mentre possiamo trovare una superficie parabolica, sempre contenuta all'interno dello spessore, che mi elimini le sollecitazioni di trazione nei paralleli, ma mi dia spinte sulle strutture di appoggio della struttura, problemi di schiacciamento della muratura per le elevate tensioni in alcuni punti e la parzializzazione della sezione.

Fatta questa premessa ci accingiamo ad affrontare lo studio della teoria membranale trascurando gli effetti flessionali sulla struttura.

Per le volte di rivoluzione le linee di curvatura principali sono costituite dai meridiani e dai paralleli, i raggi principali di curvatura sono dati dal raggio di curvatura R_1 del meridiano e da $R_2 = \frac{r}{\sin \vartheta}$ dove r è il raggio del parallelo passante per il punto in esame (fig.1.4.1).

Analizziamo il caso di distribuzione di carico uniforme sulla cupola. Essendo le forze agenti simmetriche rispetto all'asse di rivoluzione, anche gli effetti prodotti da tali forze risulteranno simmetrici.

La geometria della cupola si definisce, in qualunque suo punto generico P, in funzione di R_1 , raggio di curvatura del meridiano, di ψ , angolo di rotazione del raggio r del parallelo, nel piano orizzontale, e di θ , la latitudine, angolo tra l'asse verticale di simmetria e la normale alla superficie nel punto considerato.

Essendo la cupola caricata in maniera assialsimmetrica, nel caso di sole forze verticali, le equazioni di equilibrio per ottenere gli sforzi N_1 e N_2 , lungo i meridiani e i paralleli, in un elemento di cupola, si riducono alle condizioni di equilibrio globale alla traslazione verticale, di tutta la parte di cupola superiore ad un parallelo, e di equilibrio locale lungo la normale alla superficie.

In regime di membrana, le equazioni di equilibrio sono le seguenti :

$$N_1 = -\frac{Q}{2\pi r \sin \vartheta}$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = Z$$

Consideriamo come primo tentativo la superficie di pressioni coincidente con la *superficie media* della cupola.

Dal computo metrico del 1833 si è potuto determinare la geometria e i materiali utilizzati per la costruzione dei singoli elementi:

a) la lanterna

Materiali: tufo vulcanico $\gamma_t = 1800 \text{ kg/mc}$

malta di calce $\gamma_m = 1800 \text{ kg/mc}$

stucco $\gamma_s = 1500 \text{ kg/mc}$

Geometria. Lanternino di forma cilindrica e pianta circolare

($D_{\text{est}} = 3,10 \text{ m}$; spessore = 0,40 m; H = 2,75 m)

n° 8 finestre (B = 0.85 m; H = 1,35 m)

cupolino emisferico di copertura della lanterna ($D_{\text{est}} = 3,1 \text{ m}$;
s = 0,40 m)

b) la Cupola

Materiali: tufo vulcanico $\gamma_t = 1800 \text{ kg/mc}$

malta di calce $\gamma_m = 1800 \text{ kg/mc}$

stucco $\gamma_s = 1500 \text{ kg/mc}$

Geometria. Cupola emisferica ($D_{\text{int}} = 10,50 \text{ m}$; s = 4,60 m)

Superficie emisferica

Analizziamo, ora, lo stato tensionale della cupola in alcuni punti:

$$1) P_1 = (x=1,30 \text{ m}; z=0,15 \text{ m})$$

$$r = 1,30 \text{ m} \quad \theta = 13^\circ$$

$$R=5,55 \text{ m}$$

Il peso della lanterna è :

$$Q_l = (\gamma_t s_t + \gamma_m s_m + \gamma_s s_s) x [(2\pi r H - 8x1,35x0,85) + 2\pi r^2] = 18790$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -11500 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -1,90 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z' = Z + \frac{Q}{A_{base}} = (\gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s) + \frac{18790}{2\pi \cdot 1,30 \cdot 0,40} = 6930 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z' \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -26200 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = -4,30 \text{ kg / cmq}$$

$$2) P_2 = (2,35 ; 0,50)$$

$$r = 2,35 \text{ m} \quad \theta = 25^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q_2 = Q_l + [2\pi R(z - z_o)] \cdot (\gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s) = 34400 \text{ kg}$$

$$z_o = 0,50 \text{ m}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -5570 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,90 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = \left(Z \cos \theta - \frac{N_m}{R} \right) \cdot R = -320 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = -0,05 \text{ kg / cmq}$$

$$3) P_3 = (3,45 ; 1,20)$$

$$r = 3,45 \text{ m} \quad \theta = 38^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 61520 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -4650 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,75 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = \left(Z \cos \theta - \frac{N_m}{R} \right) \cdot R = -530 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = -0,09 \text{ kg / cmq}$$

4) $P_4 = (4,45 ; 2,10)$

$$r = 4,45 \text{ m} \quad \theta = 51^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 98100 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -4610 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,75 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = \left(Z \cos \theta - \frac{N_m}{R} \right) \cdot R = 500 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = 0,08 \text{ kg / cmq}$$

5) $P_5 = (5,00 ; 3,10)$

$$r = 5,00 \text{ m} \quad \theta = 64^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 143290 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -5040 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,85 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = 2160 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = 0,35 \text{ kg / cmq}$$

6) $P_6 = (5,45 ; 4,40)$

$$r = 5,45 \text{ m} \quad \theta = 77^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 193000 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -5770 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,95 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = 4230 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = 0,70 \text{ kg / cmq}$$

$$7) P_7 = (5,55 ; 5,55)$$

$$r = 5,55 \text{ m} \quad \theta = 90^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 241500 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -5770 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -1,15 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

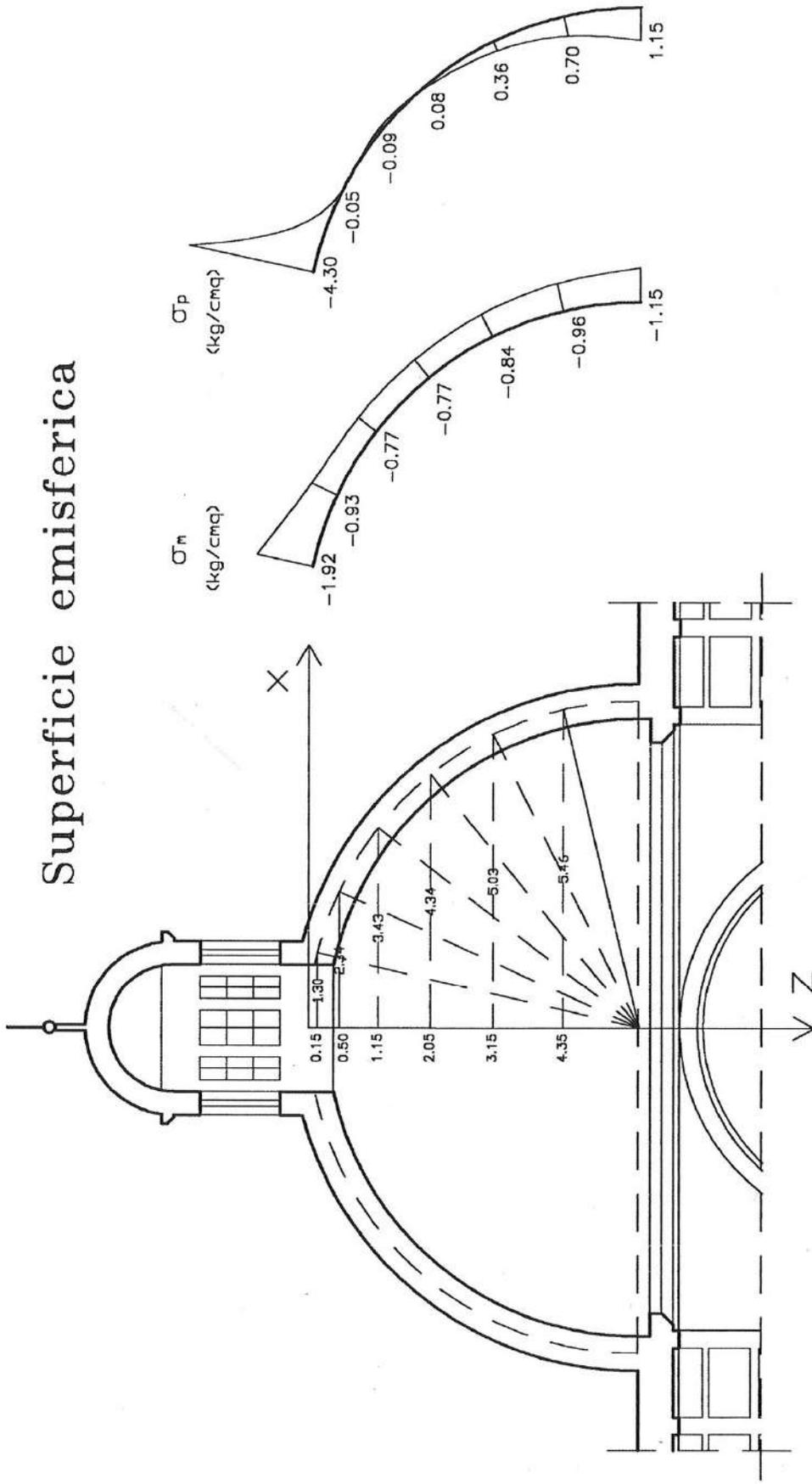
$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = 6930 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = 1,15 \text{ kg / cmq}$$

Superficie emisferica



Consideriamo come secondo tentativo la superficie di pressioni coincidente con una superficie parabolica della cupola.

La sezione della superficie, nel piano xz, corrisponde ad una parabola del quarto ordine ottenuta imponendo il passaggio per due punti, fissati con accuratezza, all'interno del volume della volta.

Considerando l'equazione generica di una parabola del quarto ordine :

$$z = ax^4 + bx^2$$

imponendo la condizione di passaggio per due punti :

$$P_1=(4,00;2,20) \quad e \quad P_2=(5,75;5,8)$$

Otteniamo il seguente sistema di equazioni :

$$\begin{cases} 256a + 16b = 2,20 \\ 1093,13a + 33b = 5,8 \end{cases}$$

la cui soluzione risulta :

$$z = 0,0022x^4 + 0,102x^2$$

Lo stato tensionale della cupola risulta :

$$1) P_1 = (x=1,75 \text{ m}; z=0,35 \text{ m})$$

$$r = 1,75 \text{ m} \quad \theta = 23^\circ$$

$$R_1=4,00 \text{ m} \quad R_2=4,45 \text{ m}$$

Il peso della lanterna è :

$$Q_l = (\gamma_t s_t + \gamma_m s_m + \gamma_s s_s) x [(2\pi r H - 8x1,35x0,85) + 2\pi r^2] = 18790 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -4440 \text{ kg / m}$$

$$e = 20 \text{ cm}$$

$$u = 10 \text{ cm}$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{2N_m}{3us} = -2,20 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z' = Z + \frac{Q}{A_{base}} = (\gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s) + \frac{18790}{2\pi \cdot 1,30 \cdot 0,40} = 6930 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z' \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -8610 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{2N_p}{3us} = -4,30 \text{ kg / cmq}$$

$$2) P_2 = (2,65 ; 0,85)$$

$$r = 2,65 \text{ m} \quad \theta = 35^\circ$$

$$R_1 = 4,70 \text{ m} \quad R_2 = 4,60 \text{ m}$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q_2 = Q_t + [2\pi R(z - z_o)] \cdot (\gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s) = 34400 \text{ kg}$$

$$z_o = 0,50 \text{ m}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -3630 \text{ kg / m}$$

$$e = 11 \text{ cm}$$

$$u = 19 \text{ cm}$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{2N_m}{3us} = -1,30 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -905 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{2N_p}{3us} = -0,35 \text{ kg / cmq}$$

$$3) P_3 = (3,45 ; 1,55)$$

$$r = 3,45 \text{ m} \quad \theta = 45^\circ$$

$$R_1 = 5,55 \text{ m} \quad R_2 = 4,90 \text{ m}$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 61520 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -4050 \text{ kg / m}$$

$$e = 5 \text{ cm}$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{N_m}{s} + \frac{N_m \cdot e}{s^2 / 6} = -1,00 \text{ kg / cmq}$$

$$\sigma_{1\min} = \frac{N_m}{s} - \frac{N_m \cdot e}{s^2 / 6} = -0,30 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -480 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{N_p}{s} + \frac{N_p \cdot e}{s^2 / 6} = -0,15 \text{ kg / cmq}$$

$$\sigma_{2\min} = \frac{N_p}{s} - \frac{N_p \cdot e}{s^2 / 6} = -0,05 \text{ kg / cmq}$$

$$4) P_4 = (4,15 ; 2,45)$$

$$r = 4,15 \text{ m} \quad \theta = 55^\circ$$

$$R_1 = 8,40 \text{ m} \quad R_2 = 5,00 \text{ m}$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 98100 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -4610 \text{ kg / m}$$

$$e = 18 \text{ cm}$$

$$u = 12 \text{ cm}$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{2N_m}{3us} = -2,15 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -630 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{2N_p}{3us} = -0,30 \text{ kg / cmq}$$

$$5) P_5 = (4,75 ; 3,50)$$

$$r = 4,75 \text{ m} \quad \theta = 62^\circ$$

$$R_1 = 12,35 \text{ m} \quad R_2 = 5,40 \text{ m}$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 143290 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -5460 \text{ kg / m}$$

$$e = 22 \text{ cm}$$

$$u = 8 \text{ cm}$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{2N_m}{3us} = -2,90 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -600 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{2N_p}{3us} = -0,35 \text{ kg / cmq}$$

6) $P_6 = (5,30 ; 4,65)$

$$r = 5,30 \text{ m} \quad \theta = 67^\circ$$

$$R_1 = 20,00 \text{ m} \quad R_2 = 5,75 \text{ m}$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 193000 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -6320 \text{ kg / m}$$

$$e = 12 \text{ cm}$$

$$u = 18 \text{ cm}$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{2N_m}{3us} = -2,30 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -830 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{2N_p}{3us} = -0,30 \text{ kg / cmq}$$

$$7) P_7 = (5,75 ; 5,55)$$

$$r = 5,75 \text{ m} \quad \theta = 70^\circ$$

$$R_1 = 22,15 \text{ m} \quad R_2 = 6,10 \text{ m}$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 241500 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -7120 \text{ kg / m}$$

$$e = 20 \text{ cm}$$

$$u = 10 \text{ cm}$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{2N_m}{3us} = -3,55 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

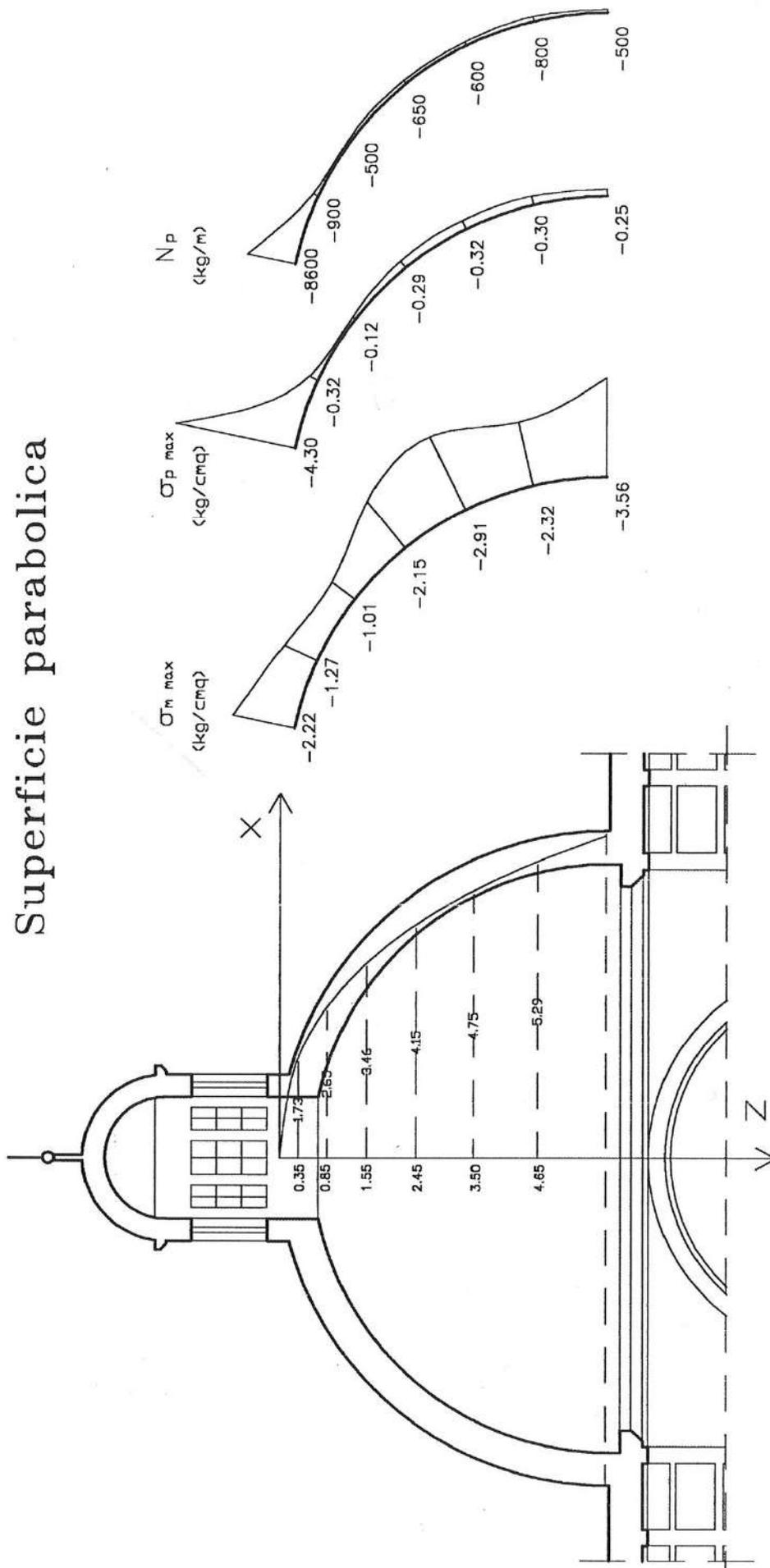
$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = 500 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_{2 \max} = \frac{2N_p}{3us} = -0,25 \text{ kg / cmq}$$

Superficie parabolica



Analizziamo, ora, lo stato tensionale della cupola nel caso di:

Superficie emisferica in assenza di lanterna

1) $P_1 = (x=1,30 \text{ m}; z=0,15 \text{ m})$

$$r = 1,30 \text{ m} \quad \theta = 13^\circ$$

$$R=5,55 \text{ m}$$

Il peso della lanterna è :

$$Q_2 = 2\pi R z \cdot (\gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s) = 6170 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -3320 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,55 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -3065 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = -0,50 \text{ kg / cmq}$$

2) $P_2 = (2,35 ; 0,50)$

$$r = 2,35 \text{ m} \quad \theta = 25^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 20980 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -3435 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,60 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -2500 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = -0,40 \text{ kg / cmq}$$

3) $P_3 = (3,45 ; 1,20)$

$$r = 3,45 \text{ m} \quad \theta = 38^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 48120 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -3665 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,60 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -1498 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = -0,25 \text{ kg / cmq}$$

4) $P_4 = (4,45 ; 2,10)$

$$r = 4,45 \text{ m} \quad \theta = 51^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 84730 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -4020 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,70 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = -100 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = -0,02 \text{ kg / cmq}$$

5) $P_5 = (5,00 ; 3,10)$

$$r = 5,00 \text{ m} \quad \theta = 64^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 129970 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -4555 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,75 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = 1685 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = 0,30 \text{ kg / cmq}$$

6) $P_6 = (5,45 ; 4,40)$

$$r = 5,45 \text{ m} \quad \theta = 77^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 179730 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -5350 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -0,90 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = 3875 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = 0,65 \text{ kg / cmq}$$

7) $P_7 = (5,55 ; 5,55)$

$$r = 5,55 \text{ m} \quad \theta = 90^\circ$$

Il peso della parte sovrastante è :

$$Q = 228260 \text{ kg}$$

Lo sforzo nei meridiani risulta :

$$N_m = -\frac{Q}{2\pi R \sin \theta} = -6550 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{s \cdot 100} = -1,10 \text{ kg / cmq}$$

Il peso locale della cupola risulta il seguente :

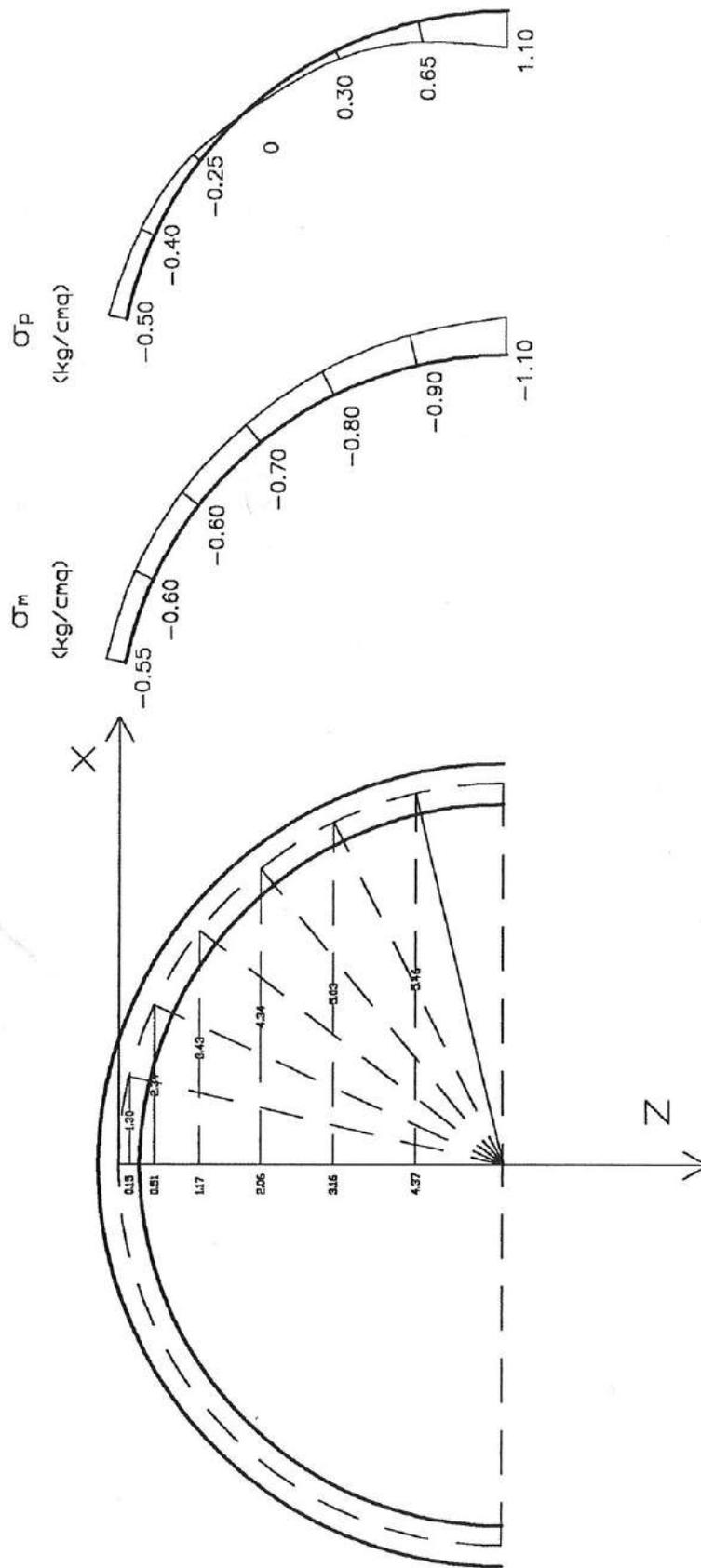
$$Z = \gamma_t \cdot s_t + \gamma_m \cdot s_m + \gamma_s \cdot s_s = 1180 \text{ kg / mq}$$

Quindi lo sforzo nel parallelo risulta :

$$N_p = (Z \cos \theta - \frac{N_m}{R}) \cdot R = 6550 \text{ kg / m}$$

$$\sigma_p = \frac{N_p}{s \cdot 100} = 1,10 \text{ kg / cmq}$$

Superficie emisferica senza lanterna



3.2 *Analisi statica della Cupola con il metodo degli elementi finiti*

Il metodo degli elementi finiti risolve il problema dell'equilibrio di un corpo continuo, soggetto ad azioni esterne, retto da equazioni differenziali alle derivate parziali.

Alla base di tale metodo sta la suddivisione della struttura in un certo numero di porzioni, dette appunto *elementi finiti*, e si stabilisce il modello di spostamento individualmente per ognuno di essi. Su questa base viene definito il comportamento di ogni singolo elemento e quello dell'intera struttura viene poi ricostruito assemblando gli elementi di cui è composta, che si immaginano connessi tra di loro e con il supporto esterno solo in determinati punti, detti *nodi*.

E' quindi sufficiente determinare le proprietà di alcuni elementi fondamentali (rettangoli, triangoli) che si ripetono più volte nella struttura e possono essere utilizzati anche con riferimento a strutture diverse per forma e condizioni di vincolo e carico.

Il calcolo delle proprietà degli elementi, e il loro assemblaggio richiedono operazioni di natura ripetitiva, affidabili quasi per intero a programmi di calcolo.

Tale teoria fu suggerita da alcuni sistemi strutturali, quali travature reticolari o telai, che si presentano direttamente come assemblaggi di un numero finito di elementi.

Tale teoria sfrutta il metodo delle deformazioni, in quanto si assumono come incognite parametri di spostamento in alcuni punti del corpo. Il modello di spostamento viene definito in funzione di queste variabili discrete; noti i

parametri di spostamento, mediante le relazioni di congruenza, si valutano le deformazioni e da queste gli sforzi in base alle leggi costitutive del materiale.

Nel metodo degli spostamento la matrice di rigidezza della struttura viene costruita sovrapponendo per ogni nodo il contributo delle matrici di rigidezza dei singoli elementi. In modo analogo, vale a dire sovrapponendo i vettori delle forze degli elementi, si genera il vettore dei carichi. Infine si impongono le condizioni al contorno negli spostamenti. Queste operazioni danno luogo ad un sistema di equazioni algebriche nei parametri di spostamento incogniti.

Le varie fasi del metodo sono le seguenti :

- g) Discretizzazione del continuo, cioè suddivisione in elementi finiti della struttura
- h) Determinazione delle matrici di rigidezza degli elementi e dei vettori delle forze nodali
- i) Assemblaggio delle matrici di rigidezza degli elementi e dei vettori delle forze nodali per l'intero sistema di elementi e nodi (equazioni del sistema)
- j) Introduzione delle condizioni al contorno
- k) Soluzione delle equazioni del sistema risultante
- l) Calcolo delle deformazioni e degli sforzi in base agli spostamenti nodali

Per la modellazione statica della cupola si è fatto ricorso ad elementi di tipo a guscio (shell) che permettono una efficace analisi di strutture di questo tipo.

La suddivisione del corpo, nella fase di definizione geometrica della struttura , deve essere abbastanza fitta per consentirci di avvicinarci il più possibile alle soluzioni reali di equilibrio.

Per la realizzazione del modello geometrico della cupola si è sfruttata la proprietà dei programmi di calcolo, tra cui il *sap90*, da noi utilizzato, di percepire, mediante un file di input, la definizione della numerazione dei nodi e delle loro coordinate tramite una generazione ‘cilindrica’; questa consente di realizzare, attraverso un sistema di riferimento globale, una disposizione dei nodi tridimensionale lungo anelli paralleli e archi meridiani.

L’assegnazione delle proprietà, delle dimensioni e dei carichi riguardanti ogni elemento ‘shell’, a quattro nodi, è stata realizzata adottando le seguenti unità di misura congruenti :

Lunghezza (L) in m

Forze (F) in kg

Accelerazioni in m/s^2

Le proprietà del tufo vulcanico introdotte nel file di input sono state:

Modulo elastico (E) = 30000 kg/cmq

Coefficiente di Poisson $\nu = 0,2$

Peso specifico $\gamma = 1800$ kg/mc

Per quanto riguarda il tipo di elementi, si è fatto affidamento ad un comportamento sia di tipo membranale che di tipo flessionale.

Il programma di calcolo, dal file di input, provvede al calcolo delle matrici di rigidezza degli elementi, le assembla nella matrice delle rigidezze globali $[K]$, e risolve il problema ottenendo le incognite rappresentate dalle componenti di spostamento $\{x\}$, rispetto al vettore dei carichi assegnato $\{P\}$.

La struttura è stata studiata non solo in presenza dei carichi propri, ma anche di forze sismiche; infatti, il Comune di Maiori si trova in un'area dichiarata sismica di terza categoria, a bassa intensità, caratterizzata da un grado di sismicità $s=6$.

Effettuando l'analisi della cupola con il metodo 'statico', possiamo determinare le forze sismiche agenti sulla struttura tramite una serie di coefficienti, noti dalla normativa :

$$F = K_h W \quad \text{con} \quad K_h = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot c$$

dove :

$\beta_1 = 2$ (coefficiente che tiene conto della scarsa duttilità della muratura)

$\beta_2 = 2$ (coefficiente che tiene conto della modalità di verifica a rottura)

$$c = \frac{s-2}{100} = 0,04 \text{ (coefficiente di intensità sismica)}$$

W (massa sismica)

Quindi sarà :

$$F = 0,16 W$$

Dopo tali considerazioni, ci apprestiamo ad analizzare la struttura in vari casi limite di comportamento; infatti, dapprima, si studierà lo stato tensionale che scaturisce dal considerare la cupola impostata su un appoggio continuo, cioè alla base tale struttura è vincolata solo lungo la direzione verticale; in seguito, data la presenza dei pennacchi, che rappresentano un appoggio discontinuo, si esamineranno vari casi: in primo luogo la condizione di vincolo verticale per tutti i punti della base e vincoli radialsimmetrici, nel piano orizzontale, per i punti nella zona dei pennacchi; come secondo tentativo si sono svincolati lungo la verticale i punti che corrispondono al giunto in chiave delle volte a botte che

confluiscono verso la cupola; in terzo luogo si sono liberati, sempre lungo la verticale, tutti i punti che non si trovano in corrispondenza dei pennacchi.

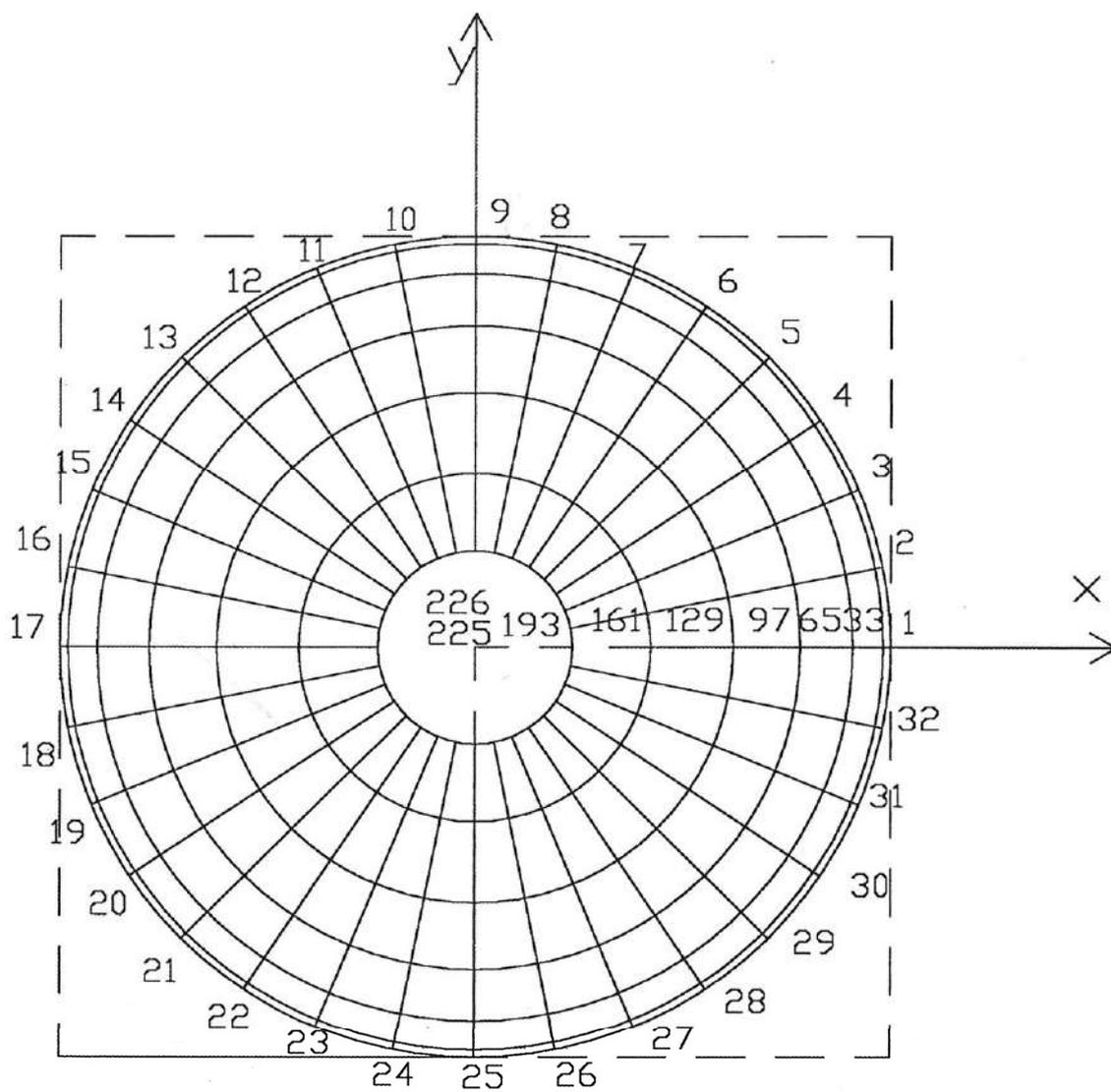
Tali tentativi di appoggio discontinuo si sono effettuati per schematizzare i possibili comportamenti della struttura.

Da tali tentativi sono emersi i vantaggi che tale tipo di appoggio arreca alla struttura, facendo diminuire di intensità le sollecitazioni di trazione nei paralleli.

Dobbiamo dire, però, che questi casi limite di appoggio discontinuo producono situazioni che sono pericolose per la struttura; infatti se si considera la terza soluzione di appoggio su pennacchi si trovano, addirittura, degli sforzi di trazione nei meridiani alla base della cupola in punti lontani dai pennacchi e di conseguenza anche delle forti eccentricità, che tende all'infinito nel punto in cui lo sforzo sul meridiano si annulla.

Per capire meglio le soluzioni adottate si fa riferimento alla figura(3.2.1) e alle seguenti condizioni:

- 1) appoggio continuo : i punti da 1 a 32 sono vincolati lungo z
- 2) appoggio su pennacchi (sol.A) : i punti da 1 a 32 sono vincolati lungo z e, inoltre, i punti 4-6,12-14,20-22,28-30 vincolati anche lungo x e y
- 3) appoggio su pennacchi (sol.B) : i punti da 1 a 32 sono vincolati lungo z, tranne i punti 1,9,17,25 e, inoltre, i punti 4-6,12-14,20-22,28-30 vincolati anche lungo x e y
- 4) appoggio su pennacchi (sol.C): solo i punti 4-6,12-14,20-22,28-30 sono vincolati lungo z, x e y



figura(3.2.1)

Analisi strutturale della cupola con il metodo agli elementi finiti

Cupola di raggio $R=5,5$ m, di latitudine θ e longitudine Ψ .
 N_1 sforzo lungo il meridiano; N_2 sforzo lungo il parallelo

1.a) Appoggio continuo : condizione di carico verticale (peso proprio)

Elemento	n_1	n_2	n_{12}	$N_{1y_{max}}$	$N \bullet$	a	m_2	$e=M_2/N_1$
	(kg/m)					(gradi)	(kgm/m)	(cm)
da 1 a 32	-5740	4350	0	-5740	4350	-0,2	11	0
da 33 a 64	-4825	3125	0	-4825	3125	-0,8	1,5	0
da 65 a 96	-4365	1675	0	-4365	1675	-1,3	48	1
da 97 a 128	-4275	340	0	-4275	340	-2,3	54	1
da 129 a 160	-4640	-1780	0	-4640	-1780	-2,8	-130	3
da 161 a 192	-7480	-4300	0	-7480	-4300	-2	-590	8

1.b) Appoggio continuo : condizione di carico verticale con forze sismiche

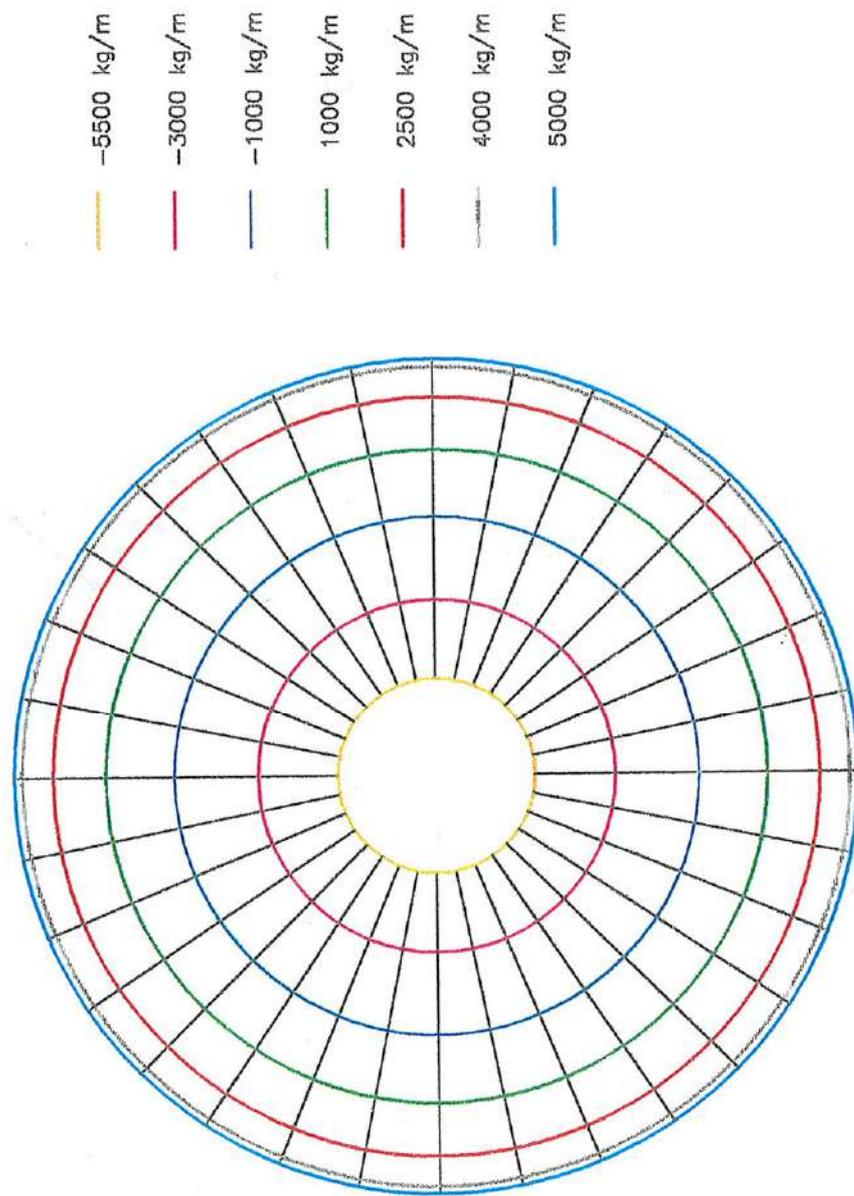
$$F=c_x P_x P=0,04 \times 4 \times P=0,16 \times P$$

dove e è il coefficiente di intensità sismica (III categoria)
 e p il coefficiente di struttura per le murature

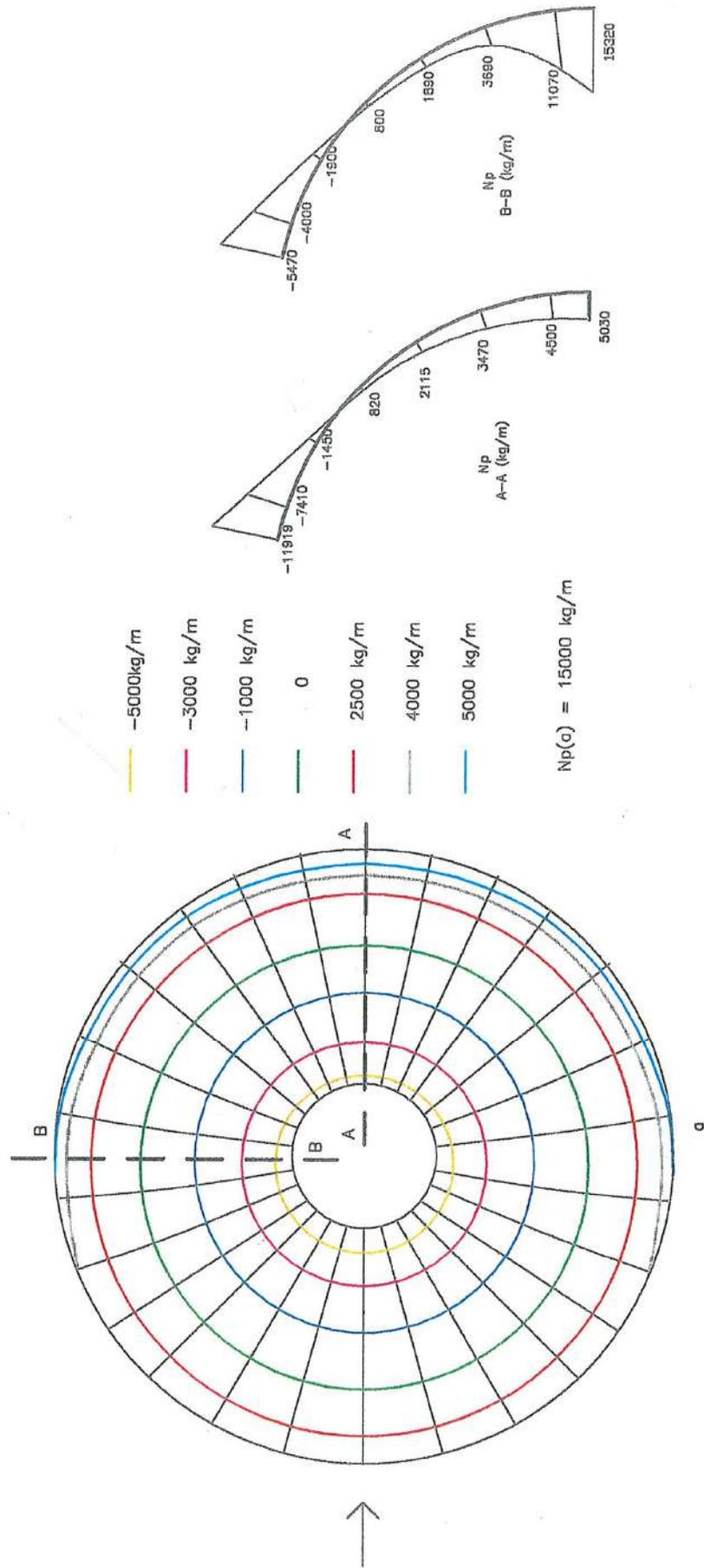
Elemento	n_1	n_2	n_{12}	n	$n \bullet$	a	m_2	$e=M_2/N_1$
	(kg/m)					(gradi)	(kgm/m)	(cm)
1	-6100	4500	0	-6100	4500	-0,3	19	0
2	-6200	4600	0	-6200	4600	-0,3	12	0
3	-6300	4800	0	-6300	4800	-0,4	13	0
4	-6400	5100	0	-6400	5100	-0,5	13	0
5	-6600	5500	0	-6600	5500	-1	14	0
6	-7000	6500	0	-7000	6500	-2,5	15	0
7	-7330	8235	-1560	-7400	8400	-5,5	12	0
8	-5830	11070	-4490	-7350	12500	-15	3	0
9	-5645	-2360	-4490	-9840	1830	-39	23	0
10	-4140	-470	-1560	-4648	975	-17,5	12	0
11	-4430	2050	-1260	-4520	2140	-5	10	0
12	-4680	2970	-260	-4690	2975	-2	9	0
13	-4950	3530	-90	-4960	3540	-1	10	0
14	-5150	3890	-35	-5155	3895	-0,5	9	0
15	-5300	4100	0	-5300	4100	0	10	0
16	-5370	4200	0	-5370	4200	0	10	0

33	-5190	3470	0	-5190	3470	-1	3	0
39	-4730	4550	-1890	-5125	4945	-11	4	0
40	-4525	2550	-1340	-5070	3100	-10	-31	1
41	-5115	3690	-1055	-5470	4045	-7	29	1
42	-4910	1695	-1890	-5425	2210	-15	-3	0
43	-4060	1550	-1070	-4260	1750	-10	4,5	0
49	-4450	2770	0	-4450	2770	-1	-6	0
65	-4750	2115	0	-4750	2115	-2	-44	1
72	-4345	1890	-795	-4465	2010	-7	-7,5	0
73	-4375	1445	-795	-4545	1615	-7,5	-89	2
74	-4380	1400	-790	-4500	1515	-7,5	63	1
75	-4185	950	-850	-4330	1100	-9	-50	1
81	-3970	1220	0	-3970	1220	-2	-52	1
97	-4700	820	0	-4700	820	-3	-39	1
113	-3825	-160	0	-3825	-160	-3	-125	3
129	-5200	-1450	0	-5200	-1450	-2	-135	3
145	-4060	-2130	0	-4060	-2130	-3	-123	3
161	-5350	-7410	0	-7410	-5350	-2	-730	14
177	-4020	-6720	0	-6720	-4020	-2	-450	11

Linee isostatiche della cupola su appoggio continuo con carichi verticali



Linee isostatiche della cupola su appoggio continuo con forze orizzontali



2.a) Appoggio su pennacchi (soluzione A) : condizione di carico verticale

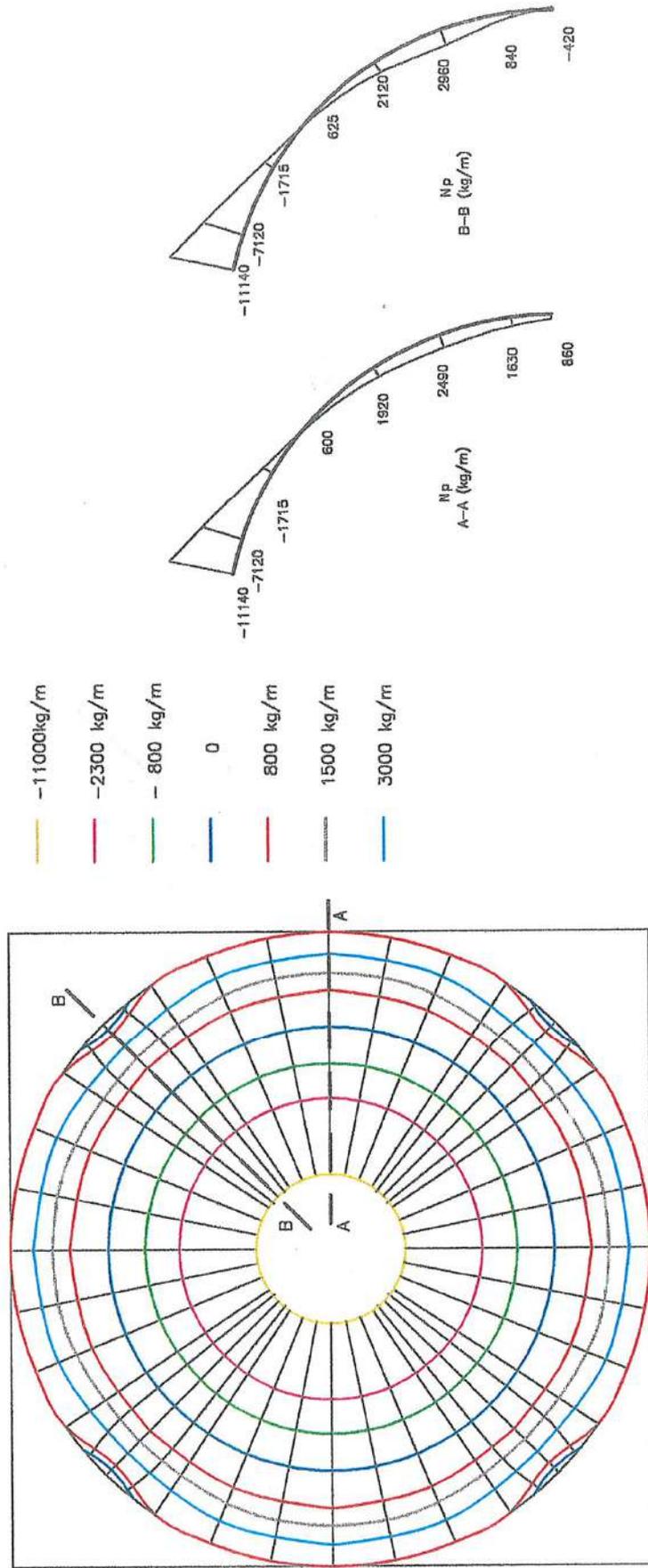
Elemento	N ₁	N ₂	N ₁₂	N	N •	a	m ₂	e=M ₂ /N ₁
	(kg/m)					(gradi)	(kgm/m) (cm)	
1	-5410	1630	100	-5420	1640	1	30	1
2	-5560	1570	260	-5570	1590	1	35	1
3	-5900	1560	260	-5905	1570	2	55	1
4	-6130	840	-40	-6130	850	2	68	1
33	-4660	2490	80	-4670	2500	2	40	1
34	-4720	2600	200	-4730	2610	2	48	1
35	-4780	2730	220	-4790	2740	2	64	1
36	-4920	2960	150	-4930	2970	1	76	2
65	-4265	1920	0	-4265	1920	0	-26	1
68	-4300	2120	0	-4300	2120	0	-30	1
97	-4230	600	0	-4230	600	0	-58	1
100	-4250	625	0	-4250	625	0	-62	1
129	-4650	-1715	0	-4650	-1715	0	-140	3
132	-4650	-1715	0	-4650	-1715	0	-140	3
161	-4720	-7120	0	-4720	-7120	0	-600	13
164	-4720	-7120	0	-4720	-7120	0	-600	13

2.b) Appoggio su pennacchi (sol.A) : carico verticale + forze sismiche

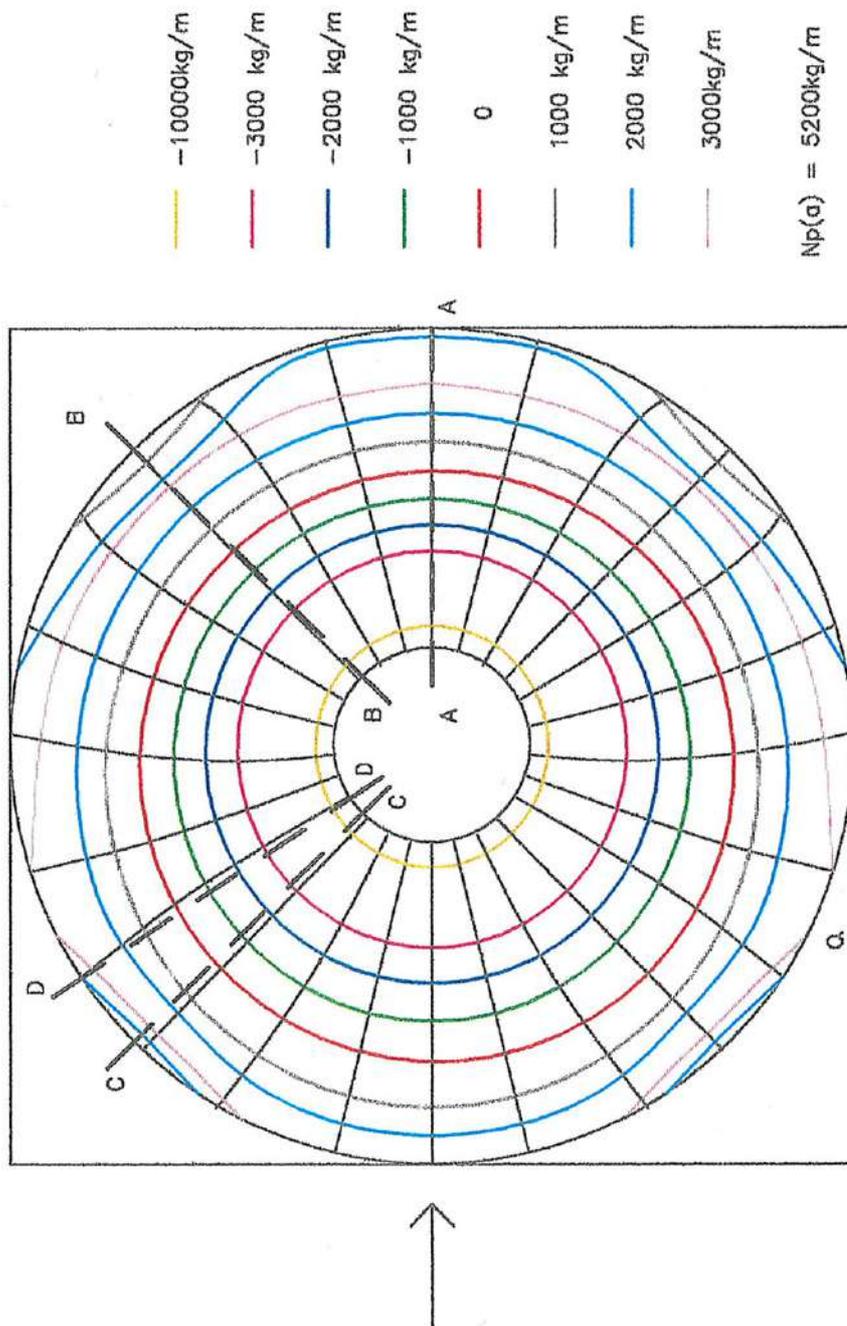
Elemento	N ₁	N ₂	N ₁₂	N _{max}	N _{min}	α	M ₂	e=M ₂ /N ₁
	(kg/m)					(gradi)	(kgm/m) (cm)	
1	-6330	1920	0	-6330	1920	-0,4	36	1
2	-6590	2170	0	-6590	2170	-0,2	46	1
3	-6920	2940	-620	-6965	2985	-3,5	70	1
4	-7110	1135	-1760	-7515	1540	-12,5	90	1
5	-6500	600	-2220	-7175	1270	-16	89	1
6	-6040	-1620	-2170	-7320	-340	-25	78	1
7	-5270	-100	-1160	-5540	170	-13	43	1
8	-5300	1100	-700	-5380	1180	-6	31	1
9	-5520	2150	-500	-5555	2180	-5	27	0
10	-5860	3245	-635	-5900	3290	-4	27	0
11	-5750	4750	-1640	-6015	5600	-9	31	1
12	-5760	1075	-2290	-6540	1850	-17,5	158	3
13	-5160	540	-1690	-5645	1510	-16	45	1
14	-4865	185	-1145	-5150	470	-13	39	1
15	-4540	980	-500	-4590	1030	-5	91	2
16	-4500	1345	-150	-4505	1350	-1,5	20	0

33	-5410	3490	0	-5410	3490	-0,3	3	0
39	-4970	2290	-1400	-5240	2560	-10,5	67	1
40	-4670	2340	-1090	-4840	2510	-8,5	44	1
41	-4650	2640	-930	-4770	2760	-7	36	1
42	-4470	2900	-1000	-4610	3040	-8	29	1
43	-4400	2510	-870	-4525	2640	-7	36	1
49	-3900	1490	210	-3920	1500	-2	20	1
65	-4800	2920	0	-4800	2920	-0,5	-18	0
81	-3730	910	165	-3750	930	-1,5	-35	1
97	-4660	1320	0	-4660	1320	-0,5	-57	1
113	-3790	-120	50	-3800	-130	-1	-60	2
129	-5160	-1380	0	-5160	-1380	-0,2	-154	3
145	-4130	-2060	0	-4130	-2060	-0,5	-125	3
161	-5360	-7530	0	-7530	-5360	-0,5	-740	14
177	-4090	-6720	0	-6720	-4090	-1	-450	11

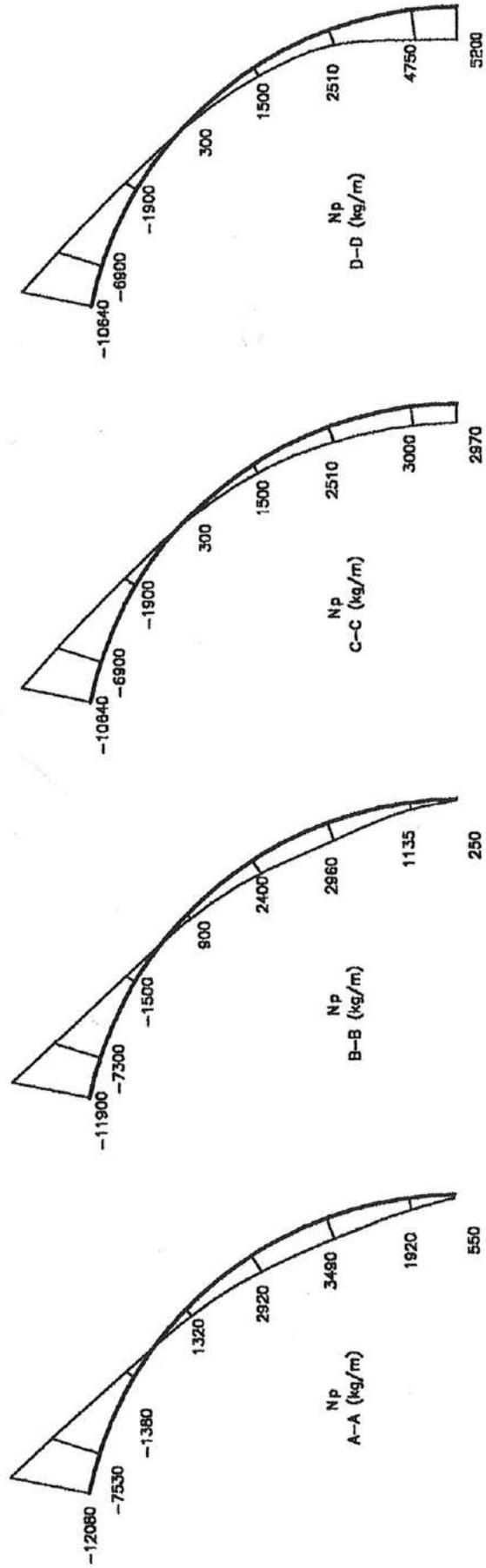
Linee isostatiche della cupola appoggiata su pennacchi (soluzione A)



Linee isostatiche della cupola su pennacchi con forze orizzontali (sol. A)



Sforzi nei paralleli (forze sismiche)



3.a) Appoggio su pennacchi (soluzione B) condizione di carico verticale

Elemento	N ₁	N ₂	N ₁₂	N _{max}	N _{min}	α	M ₂	e=M ₂ /N ₁
	(kg/m)					(gradi)	(kgm/m) (cm)	
1	-3540	2180	1930	-4280	2920	16,5	25	1
2	-6960	1220	190	7050	1310	4	40	1
3	-6200	1130	240	6250	1184	2,5	57	1
4	-6310	480	-100	-6320	750	-1	70	1
33	-4000	2050	380	-4040	2085	4	43	1
34	-4710	2950	770	-4800	3030	6	37	1
35	-5250	2810	230	-5260	2830	2	77	1
36	-5110	2910	100	-5110	2915	0,5	77	
65	-3980	1780	110	-3985	1790	1	-28	1
66	-4180	1880	270	-4200	1900	2,5	-23	1
67	-4420	2200	240	-4440	2220	2	-33	1
68	-4540	2220	60	-4545	2225	0,5	-24	1
97	-4080	500	50	-4100	510	0,5	-58	1
100	-4380	730	50	-4390	740	0,5	-62	1
129	-4590	-1760	20	-4600	1770	0,5	-140	3
132	-4710	-1660	0	-4710	-1660	0	-140	3
161	-4700	-7140	0	-7140	-4700	0	-600	13
164	-6100	-7100	0	-7100	-6100	0	-600	10

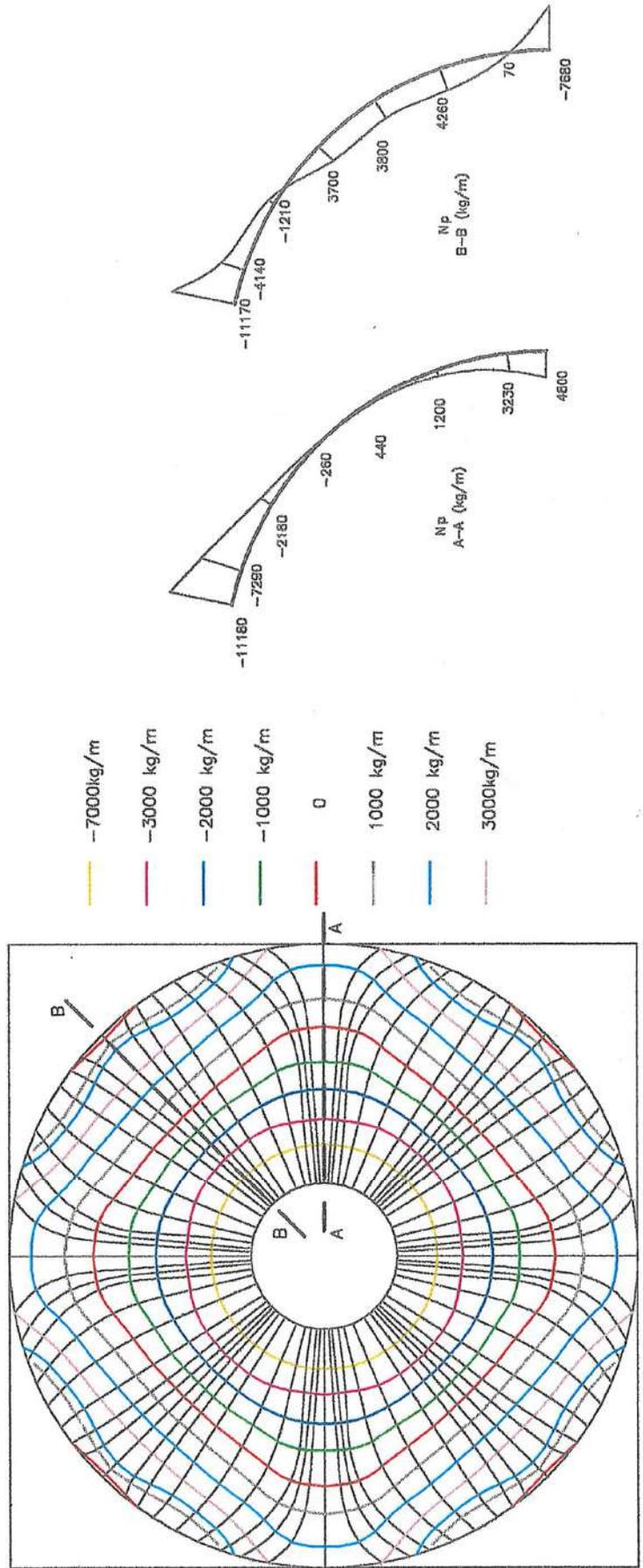
3.b) Appoggio su pennacchi (sol.B) : carico verticale + forze sismiche

Elemento	N ₁	N ₂	N ₁₂	N _{max}	N _{min}	α	M ₂	e=M ₂ /N ₁
	(kg/m)					(gradi)	(kgm/m) (cm)	
1	-4150	2550	2170	-5000	3400	16	35	1
2	-8200	1750	-60	-8300	1860	-1,5	50	1
3	-7280	2440	-650	-7350	2500	-4	73	1
4	-7310	1020	-1750	-7740	1450	-12	92	1
5	-6700	490	-2230	-7350	1140	-16	90	1
6	-6350	2070	-3880	-7850	-560	-26	80	1
7	-6660	-460	-1090	-6890	-240	-7,5	48	1
8	-3430	1650	-2530	-4620	2850	-24	27	1
9	-3640	2700	1320	-4110	3180	9	94	3
10	-7250	2900	-710	-7380	3030	-4	32	0
11	-6050	4330	-1670	6330	4610	-10	34	1
12	-5920	980	-2280	-6720	1770	-17	48	1
13	-5310	450	-1700	-5780	920	-15	47	1

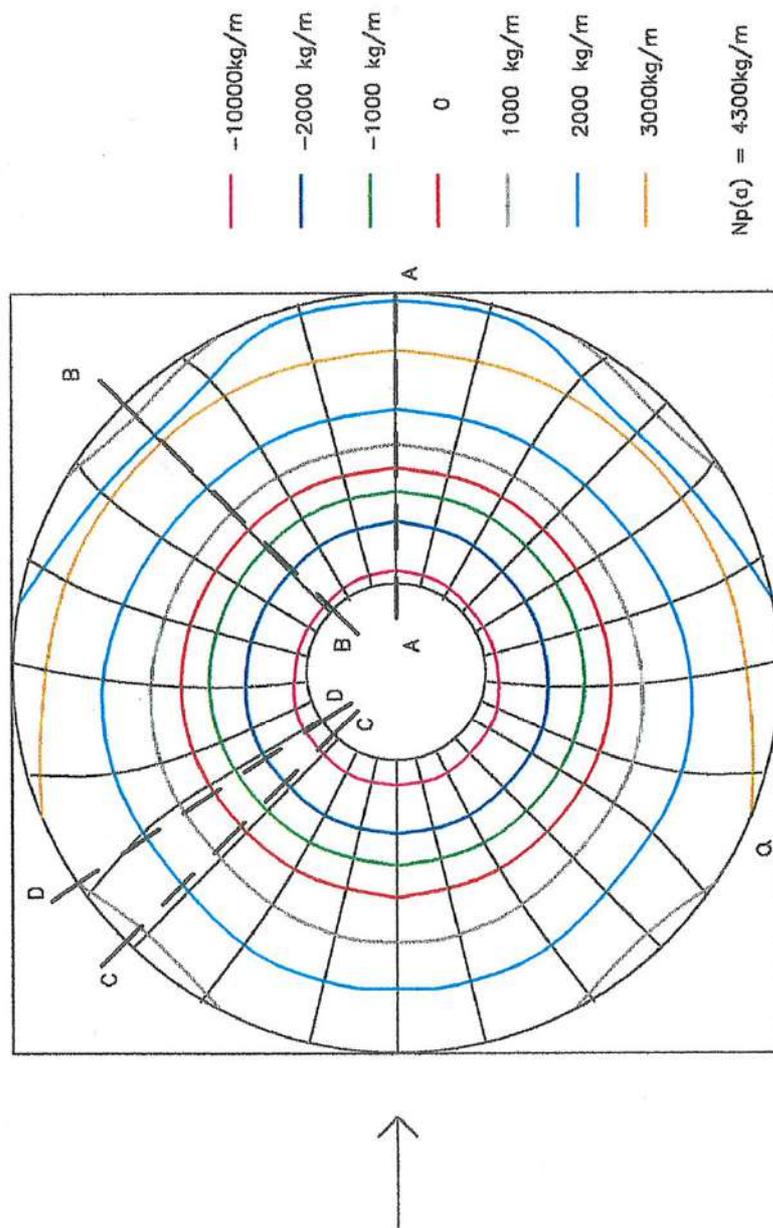
14	-5120	-180	-1620	-5490	190	13	40	1
----	-------	------	-------	-------	-----	----	----	---

15	-5700	680	-440	-5800	780	-2,5	28	0
16	-2920	2180	-1680	-3550	2440	-17,5	17	1
33	-4650	2980	290	-4670	3000	2,5	63	1
39	-4960	2640	-1990	-5450	3130	-14	56	1
40	-4010	1900	-3540	-4340	2220	-12,5	47	1
41	-3990	2200	-630	-4060	2280	-6	39	1
42	-4460	3260	-440	-4490	3290	-3,5	18	
43	-4860	2600	-860	-4980	2720	-6,5	49	1
49	-3350	1120	460	-3420	1190	5,5	23	1
65	-4460	2760	0	-4460	2760	0	-19	
81	-3480	1500	220	-3510	820	2,5	-36	1
97	-4490	1210	0	-4490	1210	0	-57	1
113	-3670	-200	100	-3680	-100	1,5	-60	2
129	-5090	-1430	0	-5090	-1430	0	-44	1
145	-4080	-2090	40	-4100	-2100	1	-126	3
161	-5340	-7550	0	-7550	-5340	0	-740	14
177	-4070	-6730	0	-6730	-4070	0	-450	11

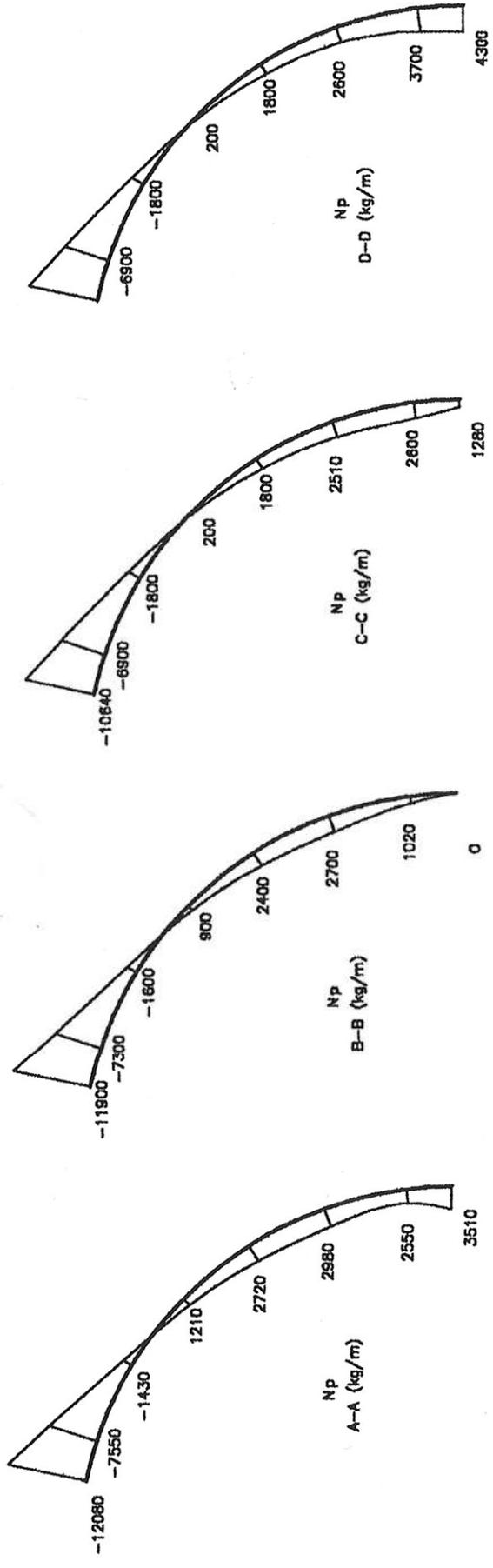
Linee isostatiche della cupola appoggiata su pennacchi



Linee isostatiche della cupola su pennacchi con forze orizzontali (sol. B)



Sforzi nei paralleli (forze sismiche)



4.a) Appoggio su pennacchi (soluzione C) : condizione di carico verticale

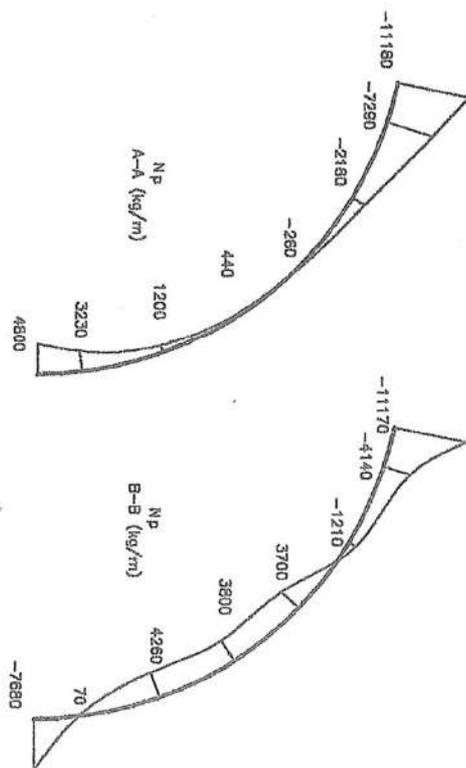
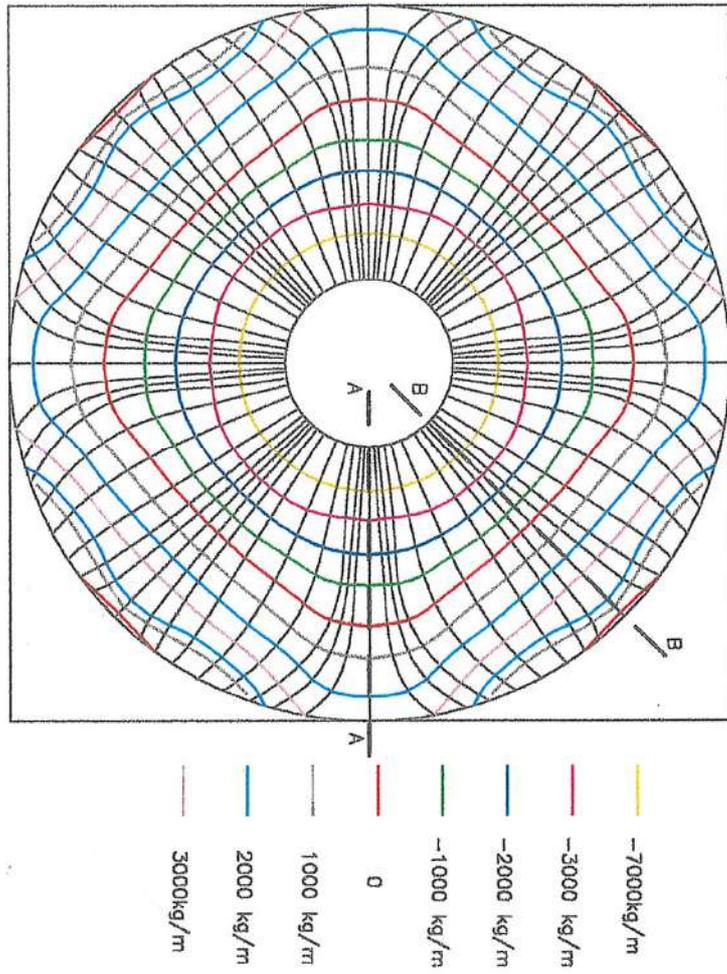
Elemento	N ₁	N ₂	N ₁₂	N _{max}	N _{min}	α	M ₂	e=M ₂ /N ₁
	(kg/m)					(gradi)	(kgm/m) (cm)	
1	60	3230	360	-140	3330	3	25	42
2	250	1520	1900	-1660	3430	25	31	12
3	-8920	-3000	6660	-14540	2620	33	80	1
4	-14410	70	920	-14650	300	2	95	1
33	-140	1200	1010	-900	1960	20	16	11
34	-2730	1070	3430	-4840	3170	31	73	3
35	-6540	3690	3480	-7650	4800	17,5	85	1
36	-9600	4260	3010	-9820	4480	6,5	-5	0
65	-1554	440	940	-1950	840	19	-20	1
66	-3150	3100	2080	-3940	2390	21	-28	1
67	-5360	2660	2110	-5880	3180	14	-17	0
68	-6970	3800	910	-7060	3880	5	-12	0
97	-2810	-260	480	-2990	-150	10	-62	2
98	-3640	410	1200	-3980	600	15	-62	2
99	-4820	1140	1200	-5050	1370	11	-60	1
100	-5640	3940	480	-5670	1710	4	62	1
129	-4070	-2180	220	-4120	-2130	7	145	4
132	-5240	-1210	220	-5250	-1190	3,5	-140	3
161	-4570	-7290	70	-7510	-4360	5,5	-600	13
164	-6990	-4140	60	-7620	-4260	2	-600	9

4.b) Appoggio su pennacchi (sol.C) : carico verticale + forze sismiche

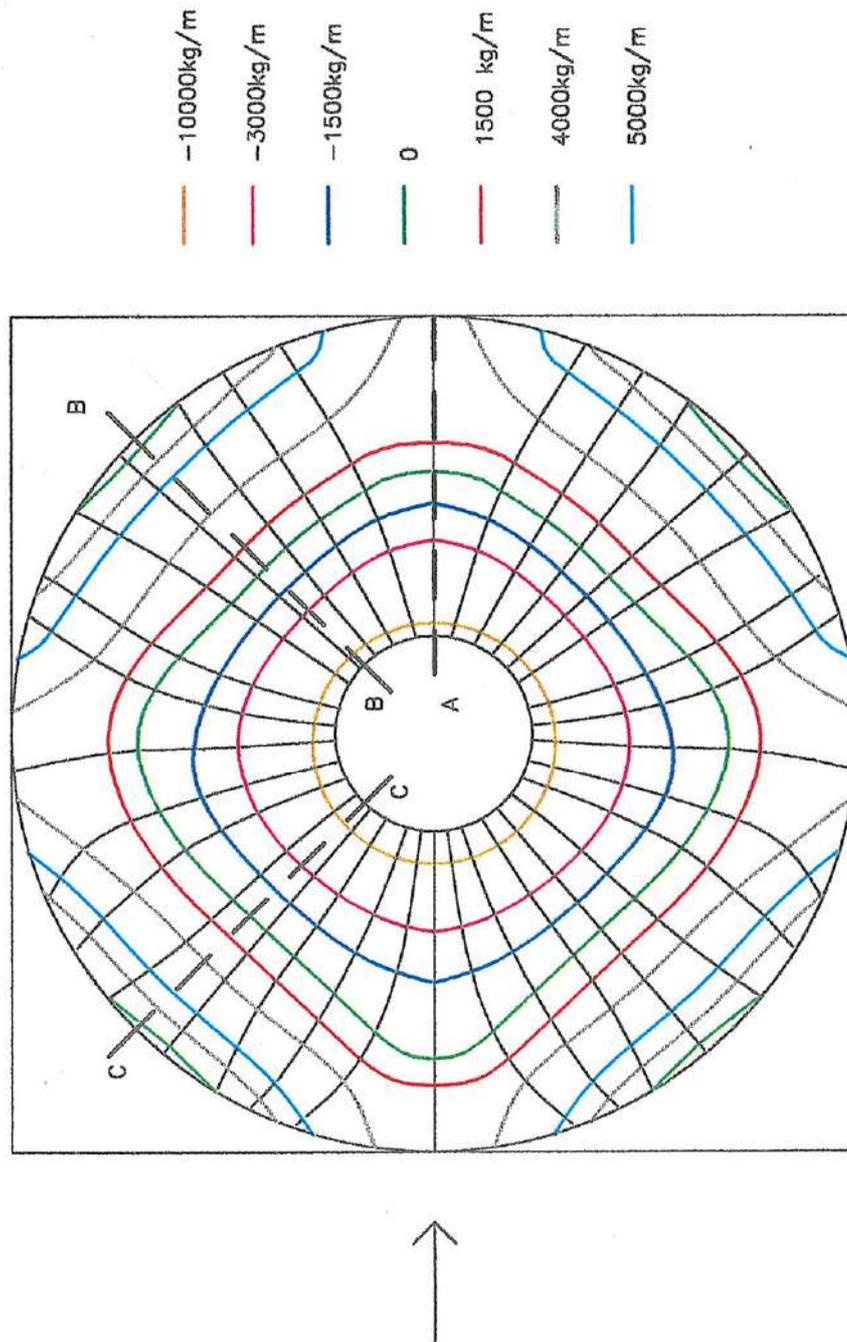
Elemento	N ₁	N ₂	N ₁₂	N _{max}	N _{min}	α	M ₂	e=M ₂ /N ₁
	(kg/m)					(gradi)	(kgm/m) (cm)	
1	60	3780	320	-50	3900	2	34	57
2	410	2130	1880	-200	4040	22,5	45	11
3	-10400	-2400	6940	-16000	3180	31	100	1
4	-16760	280	-780	-17170	690	4	100	1
5	-15100	-310	-3410	-15900	490	-12	120	1
6	-10240	-6710	-8530	-18530	2220	-39	108	1
7	-40	-600	-3000	-3380	2740	-55	-70	175
8	10	2550	-1190	-480	3030	-22	20	200
9	120	3920	-470	-120	4150	-10,5	22	18
10	540	3630	40	-450	4630	15	20	4
11	-8340	720	4790	-11290	3670	26	52	1
12	-13720	450	-1560	-14270	1000	-8	70	1

13	-12070	-140	-2620	-12660	450	-11	68	1
14	-7430	-3590	-6300	-13160	2140	-3,5	60	1
15	90	900	-1920	-1840	2840	-28	21	23
16	60	2680	-390	-20	2770	-5	16	27
33	-70	2010	1020	-720	2670	16	31	44
39	-3360	830	-4840	-6650	4120	-34	97	3
40	-320	1070	-2360	-2100	2860	-35	22	7
41	30	1340	-320	-470	1850	-7	9	30
42	-2110	1300	2030	-3090	2280	26	48	2
43	-5750	3430	2320	-6320	4000	14	52	1
49	-210	400	1010	-1120	1300	26	0	0
65	-1550	1190	980	-1900	1540	16	-19	1
72	-1760	560	-2020	-2930	1720	-30	-22	1
73	-1350	330	-130	-1550	1010	-6	-32	2
74	-2650	1240	1170	-2980	1570	15	-35	1
81	-1560	-300	900	-2040	180	25	-35	2
97	-2920	260	510	-3020	370	8	-63	2
113	-2710	-800	440	-2840	-660	11	-63	2
129	-4400	-2000	270	-4450	-1940	6	-162	4
145	-3740	-2360	180	-3790	-2320	8	-128	3
161	-5130	-7800	100	-8240	-4700	4	-203	4
177	-4010	-6780	40	-6800	-4000	30	-450	11

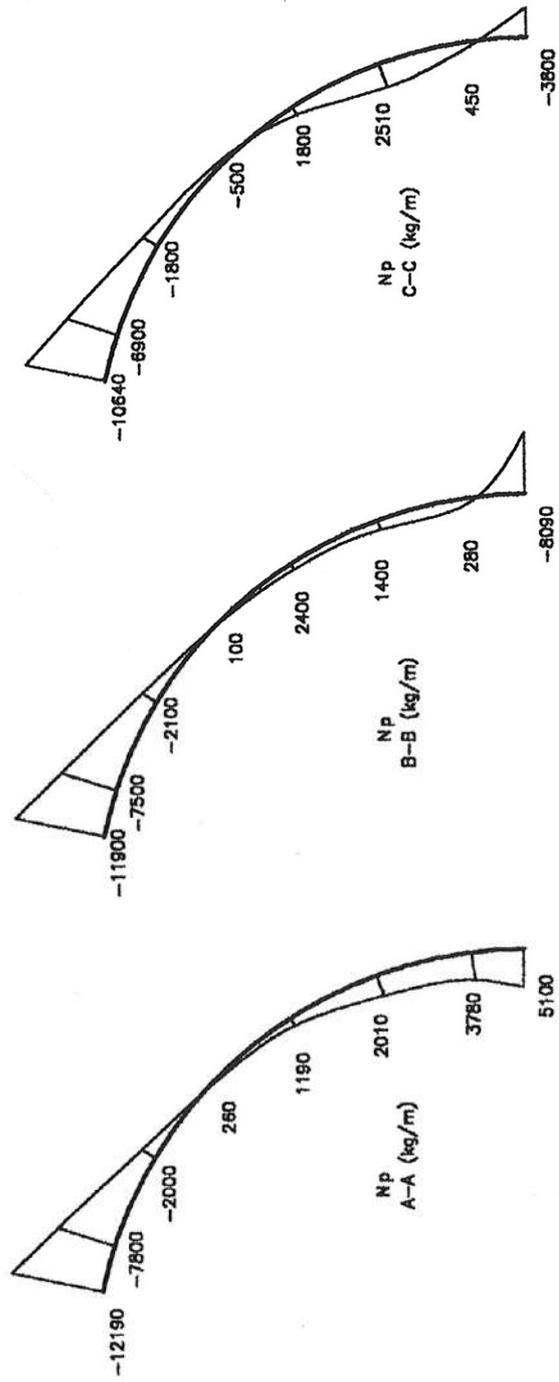
Linee isostatiche della cupola appoggiata su pennacchi



Linee isostatiche della cupola su pennacchi con forze orizzontali (sol. C)



Sforzi nei paralleli (forze sismiche)



3.3 Interventi per la conservazione della struttura

La lettura statica della cupola studiata, in presenza di carichi propri e di forze sismiche, ci ha confermato quali siano le situazioni di pericolo di crollo della struttura : la copertura è soggetta, specialmente sotto azioni sismiche, a rilevanti sforzi di trazione nei paralleli nelle sezioni dall'imposta alla sezione al rene.

Tale struttura ha resistito nel tempo grazie ad una buona qualità delle malte di calce utilizzate; infatti, tale calce veniva ottenuta da un tipo di calcare con una buona resistenza a trazione, prelevato da pozzi esistenti in quel periodo nella Costiera Amalfitana.

Oggi, la cupola della chiesa presenta una vistosa lesione lungo un meridiano, dovuta, però, all'azione del terremoto verificatosi nel 1980; ciò ci induce a studiare quali siano le possibili strategie di intervento affinché la struttura possa resistere, in futuro, anche ad azioni aggiuntive, come quelle sismiche.

E' ben evidente che si deve realizzare una cerchiatura della struttura, capace di assorbire gli sforzi di trazione nei paralleli, ma vi sono diverse tecniche di intervento e diversi sono i materiali da utilizzare.

A tal proposito, nella ricerca storica di interventi di questo tipo, si è riscontrato che nel XVIII secolo fu realizzato un restauro alla cupola di San Pietro, e per le lesioni verificatesi all'imposta fu adottato il sistema di cerchiatura in ferro, incassata nella muratura; in quel periodo, vi fu un'accesa discussione se incassare o porre esternamente tali cerchioni in ferro, ma alla fine il Poleni, responsabile dei restauri, decise per la prima soluzione intuendo che ci sarebbe stata una maggiore collaborazione statica tra i cerchioni e la muratura.

Fino ad oggi questa è stata la tecnica più seguita dai progettisti per la conservazione di tale tipo di struttura; tale tecnica è stata migliorata con la messa in tensione di tali 'fasce' metalliche per far fronte alle cadute di tensione dell'acciaio (in passato era consuetudine riscaldarle) e con l'utilizzo di malte a stabilità volumetrica che consentono una migliore aderenza alla struttura preesistente.

Riteniamo che sia più idoneo utilizzare anelli 'piatti' di acciaio a sezione rettangolare, rispetto al tondino di ferro perché tali anelli consentono di assorbire, in maniera più uniforme, gli sforzi di trazione distribuiti in un'ampia zona; infatti, aumenta, a parità di area di acciaio, la superficie di trasmissione degli sforzi dalla muratura all'elemento resistente; il tondino di ferro, invece, è più adatto nel caso in cui sono presenti delle sollecitazioni concentrate.

Nasce, in questo tipo di intervento, però, il problema di come tesare questi anelli; la soluzione potrebbe essere di realizzare degli anelli aperti alle cui estremità saldare dei tondini, di piccola lunghezza, filettati ad una estremità, e mediante una piastra, dei bulloni e una chiave dinamometrica imprimere la pretensione .

Tale pretensione non deve essere effettuata se l'intervento si realizza in piena estate, per esempio ad agosto, perché in quel periodo l'acciaio ha raggiunto il suo massimo allungamento.

Tale intervento, però, altererebbe il tessuto murario della cupola, dovendo creare delle scanalature per l'alloggiamento degli anelli metallici.

Oltre questo tipo di intervento ‘tradizionale’, vi è uno innovativo che utilizza i cosiddetti materiali compositi, realizzati mediante incollaggio sulla struttura, con resine di natura epossidica, di tessuti in fibre di carbonio, di aramide o di vetro.

Tali fibre presentano notevoli resistenze a trazione che raggiungono, nel caso del carbonio, i 30000 kg/cmq, un basso peso specifico e facilità di applicazione.

In Italia non vi è ancora una sperimentazione approfondita sul comportamento di questo materiale, ma si sta diffondendo, per lo più, una logica basata su controlli in cantiere, dato che molte volte le normative, e le prove di sperimentazione, tardano ad arrivare.

Questo tipo di materiale è stato utilizzato per interventi urgenti nelle volte della Basilica di San Francesco di Assisi proprio per la sua facilità di impiego.

Le volte danneggiate dal sisma, infatti, sono state trattate con questi materiali compositi, risarcendo le lesioni che potevano essere dannose per gli affreschi di Giotto e di Cimabue.

Tali ‘bendature’ hanno resistito anche a delle azioni dovute ad una scossa di terremoto nel maggio del 1998, ma essendo state applicate, in via precauzionale, senza nessuna modellazione statica, sono state asportate successivamente e sostituite con una struttura realizzata in legno lamellare e materiale composito, a cui sono state ‘appese’ le volte in muratura.

I controlli di cantiere si basano sulla verifica delle qualità e delle resistenze dei materiali e specialmente dell’aderenza tra la resina epossidica e il supporto.

L'adesione è da tener bene in conto nell'applicazione su supporti in muratura perché, se viene meno questa, non vi è più collaborazione tra la struttura originaria e il materiale composito.

Quindi, ciò che domina il regime statico non è tanto la resistenza del tessuto in fibre, ma piuttosto l'aderenza della resina con la muratura.

A tal proposito si effettuano delle prove di strappo con martinetti idraulici su supporti che presentano le stesse caratteristiche di quelli da rinforzare.

Un altro problema che potrebbe presentare tale tipo di intervento è la non elevata durabilità delle resine, che soggette a sbalzi elevati di temperatura perdono le loro caratteristiche di adesività.

Alcuni laboratori per le prove sui materiali, stanno studiando, mediante prove di invecchiamento, il comportamento di tali materiali nel tempo con buoni risultati, ma solo il tempo ci potrà dire quali siano i difetti che alterano la loro funzionalità.

Come abbiamo detto prima, nelle volte della Basilica di San Francesco le 'bendature' di materiale composito sono state asportate con utilizzo di fiamme ossidriche, con l'attenzione di non danneggiare i sottostanti affreschi; le resine, infatti, perde la sua capacità di collante a temperature intorno ai 100-120 ° C perché rammolliscono.

Da ciò che abbiamo detto sembra più efficace la realizzazione di cerchiature metalliche, ma nel caso si dovesse optare per la soluzione con materiali compositi, oltre agli accorgimenti prima menzionati, si dovrebbe, in fase di messa in opera del tessuto fibroso, tenderlo come per realizzare una pretensione e

si dovrebbe, inoltre, nella zona di giunzione delle due estremità della fascia, sovrapporre tali estremità per una lunghezza almeno pari alla larghezza della fascia.

3.3.2 Dimensionamento cerchiatura metallica

Si ipotizza di inserire tre anelli metallici a diverse altezze dall'imposta, infatti considerando il piano dell'imposta corrispondente a $z=0$ e θ la latitudine si avrà :

1) $z=1,00$ m $\theta=80^\circ$

$$R= 5,70 \text{ m (raggio anello 1)}$$

2) $z=2,00$ m $\theta=70^\circ$

$$R= 5,50 \text{ m (raggio anello 2)}$$

3) $z=3,30$ m $\theta=55^\circ$

$$R= 4,80 \text{ m (raggio anello 3)}$$

La caduta di tensione che subisce l'acciaio nel tempo si pone pari ad una caduta di tensione dovuta ad una variazione termica di circa 30°C .

Quindi per determinare la tensione di pretensione σ_{pt} si calcola prima l'allungamento, per una lunghezza unitaria, dovuto alla variazione termica:

$$\Delta l = \alpha \Delta t = 1 \times 10^{-5} \times 30 \times 100 = 0.03 \text{ cm/m}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \Rightarrow \sigma_{pt} = \frac{\Delta l E}{l} = 600 \text{ kg/cm}^2$$

Utilizzando un acciaio da carpenteria Fe 44 con tensione ammissibile

$\sigma_{am}=1900 \text{ kg/cm}^2$ si avrà :

$$\sigma_{max} = \sigma_{am} - \sigma_{pt} = 1300 \text{ kg/cm}^2$$

Le sollecitazioni massime di trazione si hanno nel caso di presenza di sisma con appoggio continuo della cupola; indicando con s_i la lunghezza della zona di influenza dell'anello i -esimo, avremo :

$$s_1 = 1.50 \text{ m}$$

$$s_2 = 1.30 \text{ m}$$

$$s_3 = 2.00 \text{ m}$$

Inoltre gli sforzi di trazione medi sono i seguenti :

$$N'_1 = 10500 \text{ kg / m}$$

$$N'_2 = 4000 \text{ kg / m}$$

$$N'_3 = 1000 \text{ kg / m}$$

Da questi dati si ottiene :

$$1) N_1 = 10500 \times 1,50 = 15750 \text{ kg}$$

$$Af = \frac{15750}{1300} = 12 \text{ cmq} \Rightarrow A = 1 \times 12 \text{ cm}$$

$$2) N_1 = 4000 \times 1,50 = 6000 \text{ kg}$$

$$Af = \frac{6000}{1300} = 5 \text{ cmq} \Rightarrow A = 1 \times 5 \text{ cm}$$

$$3) N_3 = 1000 \times 2,00 = 2000 \text{ kg}$$

$$Af = \frac{2000}{1300} = 2 \text{ cmq} \Rightarrow A = 1 \times 5 \text{ cm}$$

La forza di pretensione, utilizzando un tondino $\Phi 20$, è :

$$F_{pt} = 600 \times 3.14 = 1900 \text{ kg}$$

3.3.2 Dimensionamento cerchiatura con fibre di carbonio

Supponendo che vi sia buona adesione tra la resina e il supporto e quindi che il regime statico sia determinato dalla resistenza delle fibre di carbonio, si considera :

$$\sigma_{amc} = 0.6 \times 35000 = 21000 \text{ kg/cm}^2$$

Si ipotizza di inserire cinque fasciature a diverse altezze dall'imposta, infatti considerando il piano dell'imposta corrispondente a $z=0$ e θ la latitudine si avrà :

1) $z=0,50 \text{ m}$ $\theta=85^\circ$

$$R = 5,75 \text{ m}$$

2) $z=1,50 \text{ m}$ $\theta=75^\circ$

$$R = 5,60 \text{ m}$$

3) $z=2,40 \text{ m}$ $\theta=65^\circ$

$$R = 5,25 \text{ m}$$

4) $z=3,30 \text{ m}$ $\theta=55^\circ$

$$R = 4,75 \text{ m}$$

5) $z=4,00 \text{ m}$ $\theta=45^\circ$

$$R = 4,10 \text{ m}$$

Essendo lo spessore di esercizio del tessuto di 0.16 mm si ha :

1) $A_c = \frac{12000}{21000} = 0.56 \text{ cm}^2 \Rightarrow A = 35 \times 0.016 \text{ cm}$

2) $A_c = \frac{6000}{21000} = 0.28 \text{ cm}^2 \Rightarrow A = 20 \times 0.016 \text{ cm}$

$$3) A_c = \frac{3000}{21000} = 0.15 \text{ cmq} \Rightarrow A = 10 \times 0.016 \text{ cm}$$

$$4) A_c = \frac{2000}{21000} = 0.1 \text{ cmq} \Rightarrow A = 8 \times 0.016 \text{ cm}$$

$$5) A_c = \frac{1000}{21000} = 0.05 \text{ cmq} \Rightarrow A = 5 \times 0.016 \text{ cm}$$

3.3.3 I materiali in fibra di carbonio

materiali nuovi per riparare il vecchio

Da qualche decennio hanno fatto la comparsa in settori non strettamente legati all'edilizia – automobilismo, aerospaziale - i materiali compositi. Sotto tale nome si denominano tutti quei materiali composti appunto da fibre lunghe – quali vetro, carbonio, aramide - impregnate fra loro con resine sintetiche che nella maggior parte delle volte sono di natura epossidica.

I motivi più evidenti che spingono all'utilizzo di questi materiali sono le loro alte prestazioni tecniche, quali l'elevata resistenza a trazione - valore di rottura circa 3000 N\ mmq -, il modulo elastico –dai 160.000 fino ai 300.000 N\ mmq – , la bassa deformazione, il tutto unito ad un basso peso specifico tale da rendere i materiali compositi facili da posare, con tempi di applicazione estremamente brevi e costi decisamente contenuti.

Per risolvere le più variegate problematiche della scienza delle costruzioni – flessione, trazione, presso flessione, etc. - questi materiali sono decisamente utili.

In commercio si possono trovare – distribuiti da specifiche Case Produttrici di materiale chimico per l'edilizia – prodotti compositi sia sotto forma di lamine preformate – di varie geometrie e moduli elastici - e sia tessuti mono e

bidirezionali caratterizzati da diverso peso specifico per tutti gli altri interventi di rinforzo strutturale in cui si richieda la flessibilità del prodotto, quali cerchiature di pilastri, rinforzi al taglio.

Per tutti i sistemi di rinforzo strutturale con composito, siano placcaggi con lamine o fasciature con tessuti, gioca un ruolo fondamentale la “colla” per l’adesione, che deve essere esclusivamente di natura epossidica in quanto solo tale resina sintetica è in grado di garantire sia un’ottima adesione del composito al sottofondo e sia uno scambio di tensioni tangenziali tra il composito stesso ed il sottofondo evitando pericolosi fenomeni di viscosità e scorrimento.

La posa di tali materiali è relativamente semplice, anche se è indispensabile seguire attentamente le indicazioni riportate sulle schede tecniche delle case fornitrici.

Esistono, comunque, società specializzate solo in questi tipi di intervento di recupero, alle quali ci si può rivolgere sia per l’aspetto progettuale e sia esecutivo.

Affidarsi a imprese non specializzate può essere pericoloso in quanto l’inconveniente più diffuso, nella fase di messa in opera del materiale, è il pericoloso fenomeno dell’inglobamento di aria nella resina epossidica che vanificherebbe l’utilizzo del composito.

La progettazione statica, quindi, deve essere accompagnata da una accurata indagine sulla qualità dei materiali impiegati e dei materiali di supporto.

L'esecuzione di prove dirette di carico, sia prima che dopo l'intervento, permette di verificare la quantità di carico che viene assorbita dal composito e di stimare un coefficiente di sicurezza nei riguardi del carico ultimo.

I controlli di cantiere e quelli di collaudo devono essere eseguiti per verificare la rispondenza dei materiali impiegati con quelli previsti nella fase di progetto, in particolare dovrà prevedersi :

a) Controllo delle caratteristiche dichiarate dal produttore, mediante prelievo di un riquadro di 50 x 50 cm di tessuto secco, da ogni rullo o confezione utilizzata, da inoltrare ad un laboratorio di prova per la determinazione dello spessore e delle resistenze a trazione nelle direzioni principali.

b) Controllo sull'aderenza : con almeno una terna di prove distruttive di strappo, da eseguirsi al compimento del periodo di polimerizzazione. Per la suddetta prova dovrà essere incollato un riquadro di tessuto di 30 cm di lato in una zona della struttura non soggetta al rinforzo ma il cui supporto abbia caratteristiche meccaniche simili a quello rinforzato.

Di notevole importanza è la prova di aderenza tra la resina di incollaggio, che assorbe gli sforzi di scorrimento, e il supporto perché al comportamento elastico lineare delle fibre, si associa in parallelo un comportamento fragile dell'interfaccia muratura-rasatura che attraverso la comparsa di microfessure e dei conseguenti scorrimenti relativi, fa progressivamente venir meno la sua partecipazione alla resistenza del sistema.

Per conoscere in maniera più accurata le caratteristiche di tali materiali si riporta di seguito uno schema di scheda tecnica predisposte da alcune imprese specializzate:

Tessuto in fibra al carbonio per rinforzi strutturali

Componenti del sistema: tessuti in fibra al carbonio e resina impregnante a base epossidica.

Vantaggi

- a) Possibilità di utilizzo come rinforzo di travi alle sollecitazioni di flessione o di taglio
- b) Per rinforzi strutturali di murature e solette
- c) Possibilità di seguire la geometria delle superfici (travi, colonne, camini, pali, pareti)
- d) Resistenza agli agenti chimici ed ai condizionamenti atmosferici ed ambientali
- e) Facilità di applicazione
- f) Orientamento delle fibre in base alle proprie esigenze
- g) Ottimo rapporto resistenza / peso
- h) Ottime proprietà di resistenza a fatica
- i) Possibilità di cerchiare qualsiasi tipo di pilastro

Modalità di impiego

Preparazione della sottofondo

Il sottofondo dev'essere ripulito da olio, polveri, vecchie pitture e vernici e dal latte di cemento.

Preparazione mediante sabbiatura o idrosabbiatura. La superficie deve presentarsi piana e regolare, con eventuali irregolarità non superiori ad 1 mm.

Ricostruzione eventuale della superficie con malte.

Miscelazione

Miscelare accuratamente i due componenti della resina epossidica in un recipiente pulito fino a ottenere un colore grigio chiaro omogeneo.

Applicazione del sistema

- a) Se le irregolarità superficiali superano 1 mm., rettificare nuovamente la superficie.
- b) Applicare la resina miscelata al sottofondo in una quantità da 1,0 a 1,5 kg/mq, a seconda delle imperfezioni della superficie.
- c) Servendosi di un rullo stendere accuratamente il tessuto incorporandolo nella massa della resina.
Far fuoriuscire la resina attraverso i fori della trama.
- d) Se si vogliono stendere più strati di tessuto: applicare 0,5 kg/mq di resina, e ripetere il passaggio
- e) Aggiungere un ultimo strato di resina miscelata (0,2 kg(mq) sulla superficie a vista.
- f) Se la superficie totale deve essere intonacata, effettuare uno spolvero di quarzo sulla resina ancora fresca.

Bibliografia

- 1) E. Benvenuto, *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*;
Firenze, 1981
- 2) G. Guerra, *Statica e tecnica costruttiva delle Cupole antiche e moderne*; Napoli, 1958
- 2) G.A. Breyman, *Trattato generale di costruzioni civili*; Milano, 1926
- 4) C.A. Brebbia, *Fondamenti del metodo degli elementi finiti*; Milano, 1981
- 5) E. Giangreco, *Appunti sulla teoria membranale delle volte di rivoluzione*
- 6) C. Lenza, *Monumento e tipo nell'architettura Neoclassica: L'opera di Pietro Valente nella cultura Napoletana dell'800*, E. S. I.
- 7) G. Primicerio, *La città di Maiori dalle origini ai tempi moderni*
- 8) *Materiale di archivio : computo metrico del 1833 per i lavori di restauro della chiesa Santa Maria a Mare in Maiori*